『ベクトル空間』(日本評論社) 正誤表 (2020 年 4 月分)

誤植などをご指摘いただきました皆さまに感謝いたします.

- p.30, 7 行目：命題 2.13 (2) → 命題 2.13 (1)
- p.51, 10 行目の数式：

$$\boldsymbol{v}_a = -\frac{1}{\lambda_a}\left(\sum_{j=1}^{a-1}\lambda_j\boldsymbol{v}_j + \sum_{j=a+1}^{r}\lambda_j\boldsymbol{v}_j\right) \to \boldsymbol{v}_a = -\frac{1}{\lambda_a}\left(\sum_{j=1}^{a-1}\lambda_j\boldsymbol{v}_j + \sum_{j=a+1}^{n}\lambda_j\boldsymbol{v}_j\right)$$

- p.71, 定理 7.6：(コメント) この定理の「(1) ならば (2) であること」の証明から, 次のことがわかります.

  K 上のベクトル空間 U と V が同型で, U が有限次元であるならば,
  V も有限次元で $\dim V = \dim U$ である.

  系 10.28 の証明ではこの結果を使っています.

- p.75, 7 行目：$j = 1, 2, \ldots, l$ について → $j = 1, 2, \ldots, n$ について
- p.84, 定義 8.16：(コメント) A の成分がすべて実数のとき, この定義では K として $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ のどちらをとることもできます. そのとりかたに応じて階数の定義が変わってしまうように見えますが, 以下で示すように, どちらで考えても同じになります.

  $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ の部分集合なので, 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の部分集合と自然に見なせる. そこで, 正の整数 n について, $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{C}^n$ への包含写像 (p.58, 例 6.10) を ι_n とする.

  命題 A は実数を成分とする (m, n) 型行列で, $A \neq O$ とする. A が定める線形写像

$$L_A^{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad L_A^{\mathbb{R}}(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

  の像を $W_{\mathbb{R}}$ とする. また, A を複素数成分の行列と見なして定まる線形写像

$$L_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, \qquad L_A^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

  の像を $W_{\mathbb{C}}$ とする. このとき, ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が $W_{\mathbb{R}}$ の基底であるならば, $\iota_m(\boldsymbol{v}_1), \iota_m(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \iota_m(\boldsymbol{v}_r)$ は $W_{\mathbb{C}}$ の基底をなす. (したがって, $\mathbb{R}^m$ の部分空間 $W_{\mathbb{R}}$ の次元と, $\mathbb{C}^m$ の部分空間 $W_{\mathbb{C}}$ の次元は等しい. なお, $A = O$ のときも, $W_{\mathbb{R}} = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}\}$, $W_{\mathbb{C}} = \{\mathbf{0}_{\mathbb{C}^m}\}$ であるので, $W_{\mathbb{R}}$ の次元と $W_{\mathbb{C}}$ の次元はどちらも 0 で等しい.)

  (証明) ベクトルの組 $\iota_m(\boldsymbol{v}_1), \iota_m(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \iota_m(\boldsymbol{v}_r)$ が線形独立であることと, $W_{\mathbb{C}} = \langle \iota_m(\boldsymbol{v}_1), \iota_m(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \iota_m(\boldsymbol{v}_r)\rangle$ であることを示せばよい.

$\iota_m(\boldsymbol{v}_1), \iota_m(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \iota_m(\boldsymbol{v}_r)$ が線形独立であること　複素数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ について，$\sum_{j=1}^r \lambda_j \, \iota_m(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{C}^m}$ が成り立つとする．$j = 1, 2, \ldots, r$ について，λ_j の実部と虚部をそれぞれ α_j, β_j とする．そして，$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^r \alpha_j \boldsymbol{v}_j$, $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^r \beta_j \boldsymbol{v}_j$ とする (これらは $\mathbb{R}^m$ に属するベクトルであることに注意)．包含写像 ι_m の定義から

$$\iota_m(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \, \iota_m(\boldsymbol{v}_j), \quad \iota_m(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^r \beta_j \, \iota_m(\boldsymbol{v}_j)$$

であるので

$$\iota_m(\boldsymbol{x}) + i \, \iota_m(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \, \iota_m(\boldsymbol{v}_j) + i \sum_{j=1}^r \beta_j \, \iota_m(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{j=1}^r (\alpha_j + i\beta_j) \, \iota_m(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \, \iota_m(\boldsymbol{v}_j)$$

である．右辺は $\boldsymbol{0}_{\mathbb{C}^m}$ に等しいので，$\iota_m(\boldsymbol{x}) + i \, \iota_m(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{C}^m}$ である．この等式と，$\iota_m(\boldsymbol{x})$ と $\iota_m(\boldsymbol{y})$ の成分がすべて実数であることから，$\iota_m(\boldsymbol{x})$ と $\iota_m(\boldsymbol{y})$ はともにゼロベクトルであることがわかる．よって，包含写像の定義から $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^m}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^m}$ である．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は $W_{\mathbb{R}}$ の基底であるから線形独立なので，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の定義から，$j = 1, 2, \ldots, r$ について $\alpha_j = 0$, $\beta_j = 0$ である．したがって，$j = 1, 2, \ldots, r$ について $\lambda_j = 0$ である．以上より，$\iota_m(\boldsymbol{v}_1), \iota_m(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \iota_m(\boldsymbol{v}_r)$ は線形独立である．

$W_{\mathbb{C}} = \langle \iota_m(\boldsymbol{v}_1), \iota_m(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \iota_m(\boldsymbol{v}_r) \rangle$ であること　$\boldsymbol{w}$ は $W_{\mathbb{C}}$ に属するベクトルであるとする．$W_{\mathbb{C}}$ の定義から，$\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{u}$ となる $\mathbb{C}^n$ のベクトル $\boldsymbol{u}$ がとれる．このとき，$\boldsymbol{u}$ の各成分を実部と虚部に分けることにより，$\boldsymbol{u} = \iota_n(\boldsymbol{a}) + i \, \iota_n(\boldsymbol{b})$ を満たす $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ がとれることがわかる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は $W_{\mathbb{R}}$ の基底で，$A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}$ は $W_{\mathbb{R}}$ に属するから，$A\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^r \alpha_j \boldsymbol{v}_j$, $A\boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^r \beta_j \boldsymbol{v}_j$ となる実数 α_j, β_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ がとれる．このとき，$j = 1, 2, \ldots, r$ について複素数 λ_j を $\lambda_j = \alpha_j + i \, \beta_j$ と定めると，包含写像 ι_m の定義より

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \, \iota_m(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \, \iota_m(\boldsymbol{v}_j) + i \sum_{j=1}^r \beta_j \, \iota_m(\boldsymbol{v}_j) = \iota_m(A\boldsymbol{a}) + i \, \iota_m(A\boldsymbol{b})$$

である．A の成分はすべて実数であるから $\iota_m(A\boldsymbol{a}) = A \, \iota_n(\boldsymbol{a})$, $\iota_m(A\boldsymbol{b}) = A \, \iota_n(\boldsymbol{b})$ であるので，上式の右辺は

$$A \, \iota_n(\boldsymbol{a}) + iA \, \iota_n(\boldsymbol{b}) = A(\iota_n(\boldsymbol{a}) + i \, \iota_n(\boldsymbol{b})) = A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$$

である．よって $\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^r \lambda_j \, \iota_m(\boldsymbol{v}_j)$ である．以上より，$W_{\mathbb{C}} = \langle \iota_m(\boldsymbol{v}_1), \iota_m(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \iota_m(\boldsymbol{v}_r) \rangle$ である．□

- p.87, 命題 9.1 の 1 行目：数ベクトル空間 V の → ベクトル空間 V の

- p.91, 8 行目の数式：

$$\underbrace{\boldsymbol{0} + \cdots + \boldsymbol{0}}_{r-j\text{ 個}} \to \underbrace{\boldsymbol{0} + \cdots + \boldsymbol{0}}_{(r-j)\text{ 個}}$$

- p.93, 下から 7 行目：定理 9.8 より → 命題 9.6 より
- p.97, 式 (9.5)：

$$\underbrace{\mathbf{0}+\cdots+\mathbf{0}}_{(n-j)\text{ 個}} \to \underbrace{\mathbf{0}+\cdots+\mathbf{0}}_{(r-j)\text{ 個}}$$

- p.129, 6 行目：線形写像 L_A の → 線形変換 L_A の
- p.132, 命題 12.8：以下を追加.

  ⋯ 線形変換 $f : V \to V$ を考える. V の次元を n とする. V の基底 S に関する ⋯

- p.132, 定義 12.9：以下を追加.

  ⋯ f は V 上の線形変換であるとする. V の次元を n とする. V の基底を一つ選び, ⋯

- p.133, 下から 8 行目：以下を追加.

  ⋯ 線形変換 $(\alpha 1_V - f)$ が定まる. V の次元を n とする. V の基底 S を ⋯

- p.135, 7 行目：A の定める線形写像 → A の定める線形変換
- p.142, 下から 11 行目：(系 9.9 との対応をわかりやすくするため, 記号を以下のように変更します.)

$$(\boldsymbol{v}_{j,1}, \boldsymbol{v}_{j,2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j,k_j}) \quad \to \quad (\boldsymbol{v}_1^{(j)}, \boldsymbol{v}_2^{(j)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k_j}^{(j)})$$

- p.142, 下から 9 行目：(同上)

$$S = (\underbrace{\boldsymbol{v}_{1,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{1,k_1}}_{k_1\text{ 個}}, \underbrace{\boldsymbol{v}_{2,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{2,k_2}}_{k_2\text{ 個}}, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{v}_{r,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r,k_r}}_{k_r\text{ 個}})$$
$$\to S = (\underbrace{\boldsymbol{v}_1^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k_1}^{(1)}}_{k_1\text{ 個}}, \underbrace{\boldsymbol{v}_1^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k_2}^{(2)}}_{k_2\text{ 個}}, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{v}_1^{(r)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k_r}^{(r)}}_{k_r\text{ 個}})$$

- p.143, 系 13.5：A は n 次の正方行列 → A は複素数を成分とする n 次の正方行列
- p.149, 定理 14.4 の 1 行目：V は K 上の → V は $\mathbb{C}$ 上の
- p.150, 下から 5 行目：$L_A : K^n \to K^n \quad \to \quad L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

- p.165, 4 行目：

  さらに, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ が W の基底であれば, $\{\varphi(\boldsymbol{u}_1), \varphi(\boldsymbol{u}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{u}_r)\}$ は $\varphi(W)$ の基底である.

  $\rightarrow$

  さらに, ベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ が W の基底であれば, ベクトルの組 $\varphi(\boldsymbol{u}_1), \varphi(\boldsymbol{u}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{u}_r)$ は $\varphi(W)$ の基底である.

- p.166, 7 行目：

  最後に, 集合 $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ が W の基底であるとき, 集合 $T = \{\varphi(\boldsymbol{u}_1), \varphi(\boldsymbol{u}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{u}_r)\}$ が $\varphi(W)$ の基底であることを示そう. $\varphi(W)$ は T の要素で生成されるから T が線形独立であることを示せばよい.

  $\rightarrow$

  最後に, ベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ が W の基底であるとき, $\varphi(\boldsymbol{u}_1), \varphi(\boldsymbol{u}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{u}_r)$ が $\varphi(W)$ の基底をなすことを示そう. $\varphi(W) = \langle \varphi(\boldsymbol{u}_1), \varphi(\boldsymbol{u}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{u}_r) \rangle$ であるから, $\varphi(\boldsymbol{u}_1), \varphi(\boldsymbol{u}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{u}_r)$ が線形独立であることを示せばよい.

- p.166, 下から 9 行目：j は $1, 2, \ldots, q-1$ のいずれか $\rightarrow$ j は $2, 3, \ldots, q$ のいずれか

- p.168, 下から 9 行目：順に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ と $\rightarrow$ 順に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ と

- p.189, 脚注：少しわかりにくいので,「たとえば」以降を次のように修正します.

  たとえば, W を $\mathbb{R}^2$ の 1 次元の部分空間とし, W のベクトルの組 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に例 18.4 で定めた $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})'$ を対応させれば, 標準内積とは異なる内積が W に定まることになる.

- p.203, 命題 19.9：(コメント) 例 19.3 (2) の結果を使うと, 以下のようにより簡単に証明できます.

  (証明) 条件 ($\sharp$) より, V のどのベクトル $\boldsymbol{x}$ についても $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = 0$ である. よって, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ は V の直交補空間 $V^\perp$ に属する. 例 19.3 (2) より $V^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$ であるので, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ である. よって $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ である.