

『線形代数 行列と数ベクトル空間』(日本評論社) 正誤表 (2020年4月分)

誤植などをご指摘いただきました皆さまに感謝いたします。

- p.6, 3行目: 未知数 x_3 → 未知数 x_2
- p.62, 系 5.4: (コメント) $n = 1$ の場合は「積 $A_1 A_2 \cdots A_n$ が定義される時」という仮定がわかりにくいかもかもしれません. $n = 1$ のとき, この仮定は自明に成り立つと解釈してください.
- p.74, 例 5.16: 計算ミスがありました. 以下のように訂正します.

第1列を (-2) 倍して第2列に加える. この操作で行列式の値は変わらない.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

同様に, 第1列を (-3) 倍, (-1) 倍してそれぞれ第3列, 第4列に加える.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -12 & 5 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -10 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -10 & -1 \end{vmatrix}$$

そして, 定理 5.15 で証明した次数下げを行う.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -10 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -12 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -10 & -1 \end{vmatrix}$$

以下の手順は同様である. 必要に応じて列 (もしくは行) を入れ換える. 第1行と第3行を入れ換えると, 行列式は (-1) 倍になる.

$$\begin{vmatrix} -1 & -12 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -10 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -10 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -12 & 2 \end{vmatrix}$$

第1行を2倍して第2行に加え, 第3行にはそのまま加える. その後で次数下げをする.

$$-\begin{vmatrix} 1 & -10 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -12 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -10 & -1 \\ 0 & -22 & -1 \\ 0 & -22 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -22 & -1 \\ -22 & 1 \end{vmatrix}$$

第1行の共通因子(-1)を括り出し, 2次の正方行列の行列式の定義を使って計算すれば

$$-\begin{vmatrix} -22 & -1 \\ -22 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 & 1 \\ -22 & 1 \end{vmatrix} = 22 \cdot 1 - (-22) \cdot 1 = 44.$$

したがって, 求める行列式の値は 44 である.

- p.120, 命題 7.28 の証明の後半: 以下の記述を追加します.

$W_1 \subset W_2$ であり, さらに $d_1 = d_2$ が成り立つとする. このとき $W_1 = W_2$ であることを証明する. そのためには $W_2 \subset W_1$ であることを示せばよい. v は W_2 に属するベクトルであるとする. v が w_1, w_2, \dots, w_{d_1} のいずれかであれば, v は W_1 に属する. v が w_1, w_2, \dots, w_{d_1} のどれでもない場合を考える. このとき, W_2 のベクトルの組 $w_1, w_2, \dots, w_{d_1}, v$ は, 個数が $d_1 + 1 = d_2 + 1$ である.

- p.153, 命題 10.3: (コメント) この命題と, 次に示す命題から, 「実行列の階数は, 実数の範囲で考えても複素数の範囲で考えても変わらない」ことがわかります. \mathbb{R} は \mathbb{C} の部分集合ですから, 実行列の階数を考えるとき, スカラーの集合 K としては \mathbb{R} と \mathbb{C} のどちらもとれます. しかし, どちらで考えても階数は同じなのです.

では, このことを証明しましょう. 次の命題を使います. 以下, 話をわかりやすくするために, \mathbb{R}^n のベクトル v を自然に \mathbb{C}^n のベクトルと見なしたものを \tilde{v} と書くことにします. また, \mathbb{R}^n と \mathbb{C}^n のゼロベクトルをそれぞれ $\mathbf{0}_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}_{\mathbb{C}}$ と書いて区別します.

命題 \mathbb{R}^n のベクトルの組 v_1, v_2, \dots, v_r について次の二つの条件は同値である.

1. v_1, v_2, \dots, v_r は (\mathbb{R}^n において) 線形独立である.
2. $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_r$ は (\mathbb{C}^n において) 線形独立である.

(証明) 1ならば2であること まず, 次のことに注意する. \mathbb{R}^n に属するベクトル x, y について, $\tilde{x} + i\tilde{y} = \mathbf{0}_{\mathbb{C}}$ (i は虚数単位) が成り立つとき, $x = \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ かつ $y = \mathbf{0}_{\mathbb{R}}$ である.

v_1, v_2, \dots, v_r は \mathbb{R}^n において線形独立であるとする. 複素数のスカラー $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$

について、 $\sum_{j=1}^r \lambda_j \tilde{\mathbf{v}}_j = \mathbf{0}_\mathbb{C}$ であるとする。 $j = 1, 2, \dots, r$ について、 λ_j の実部と虚部をそれぞれ α_j, β_j とし、 $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^r \alpha_j \mathbf{v}_j$, $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^r \beta_j \mathbf{v}_j$ とすると、 \mathbf{x}, \mathbf{y} は \mathbb{R}^n のベクトルであり、 $\tilde{\mathbf{x}} + i\tilde{\mathbf{y}} = \sum_{j=1}^r (\alpha_j + i\beta_j) \tilde{\mathbf{v}}_j = \sum_{j=1}^r \lambda_j \tilde{\mathbf{v}}_j = \mathbf{0}_\mathbb{C}$ が成り立つ。 よって、前段落で注意したことから $\mathbf{x} = \mathbf{0}_\mathbb{R}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}_\mathbb{R}$ である。 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ は \mathbb{R}^n において線形独立であるから、 \mathbf{x}, \mathbf{y} の定義より、すべての $j = 1, 2, \dots, r$ について α_j, β_j は 0 である。したがって、すべての $j = 1, 2, \dots, r$ について $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j = 0$ である。以上より、 $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_r$ は線形独立である。

2ならば1であること $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_r$ は \mathbb{C}^n において線形独立であるとする。

実数のスカラー $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ について、 $\sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}_\mathbb{R}$ であるとする。左辺のベクトルの成分はすべて実数であり、 \mathbb{R} は \mathbb{C} の部分集合であるから、この等式は \mathbb{C}^n においても成り立つ。つまり $\sum_{j=1}^r \lambda_j \tilde{\mathbf{v}}_j = \mathbf{0}_\mathbb{C}$ である。 $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_r$ は線形独立であるから、すべての $j = 1, 2, \dots, r$ について $\lambda_j = 0$ である。以上より、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ は線形独立である。 □

この命題から、 (m, n) 型の実行列の列ベクトルのうち、線形独立なもの最大個数は、 \mathbb{R}^m において考えても、 \mathbb{C}^m において考えても同じです。よって、実行列の階数は実数もしくは複素数のどちらの範囲で考えても等しいです。

- p.181, 9行目 (代数学の基本定理) :

複素数係数の多項式 → 複素数係数の定数でない多項式

- p.241, 3行目 : 複素数係数の多項式 → 複素数係数の定数でない多項式

- p.245, 問 2.2.1 の答え: $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$