『年金数理』正誤表

本文中にいくつかの誤りないし改善点がありました．謹んでお詫びいたします．誤りの箇所がわかり次第，以下の正誤表に反映させていきますので，本文を訂正いただきますようお願いいいたします．(2013 年 4 月 25 日現在)

章節番号	ページ	行	正	誤
まえがき	i	11	さらに	さら
2.3	44	下から 5	${}_{t\|}p$	${}_{t\|}\ p$
2.3	49	2	$\sum_{k=0}^{m-1}$	$\sum_{k=0}^{m}$
2.3	49	5	$\ddot{a}_{x+t:\overline{n}\|}$	$\ddot{a}_{x+1:\overline{n}\|}$
2.3	49	9,13	$\dfrac{D_{x+m}}{D_x}$	$\dfrac{D_{x+t}}{D_x}$
2.3	50	13	$\dfrac{d_y}{l_x}$	$\dfrac{l_y}{l_x}$
2.3	50	下から 3	$\dfrac{7}{12}$	$\dfrac{13}{24}$
2.3	50-51	下から 2-1	(削除)	ここで，$\cdots$ と表される．
2.3	51	12	$nN_x - S_{x+1} +$ $+S_{x+n+1}$	$nN_{x+n} - S_{x+1}$ $-S_{x+n+1}$
2.3	52	11,13	$\ddot{a}^{(j)}_{\overline{(x+n)-y-1}\|}$	$\ddot{a}^{(j)}_{\overline{y-(x+n)-1}\|}$
2.3	52	下から 3	${}_{z-y\|}q_y$，v^{z-y+1}	${}_{z-x\|}q_x$，v^{z-x+1}
2.3	53	8	${}_{z-y\|}q_y$，$\ddot{a}^{\mathbf{1}}_x$	${}_{z-y\|}q_z$，$\ddot{a}^{1}_x$
2.3	53	9	$\dfrac{C_z}{D_y}, \dfrac{N_{x+n}}{D_y}$	$\dfrac{C_z}{D_x}, \dfrac{N_{x+n}}{D_x}$

章節番号	ページ	行	正	誤
2.3	54	11	(y) の終身年金 の現価	(x) の終身年金 の現価
2.3	54	13	$\ddot{a}_{x\|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$	$\ddot{a}_{x\|y} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy}$
2.3	54	下から 3	$N_{xy} = \sum_{j=0}^{\infty} D_{x+j:y+j}$	$N_{xy} = \sum_{j=0}^{\infty} D_{xy}$
3.1	61	1	t_j	t (2 箇所)
3.1	62	6	，x_e は 新規加入年齢	「x_r は定年年齢」 の後に追加
3.1	65	3	$S^a_{(e_{(n,s)},0)}$	$S^a_{(e,0)}$
3.1	66	下から 6	$\alpha^{(j)}_{(y,t+y-x)}$	$\alpha^{(j)}_{(x,t+y-x)}$
3.1	68	下から 8 解答 (2)	$\frac{v}{d} l^{(T)}_{x_e} \frac{D_{x_r}}{D_{x_e}}$	$\frac{v}{d} l_{x_e} \frac{D_{x_r}}{D_x}$
3.1	69	11	給与現価を計算 することができ	給与現価が計算 することができ
3.1	69	12	(3.7)	(3.10)
3.2	74	下から 6	$K^{(r)}_{(x_r+1,x+1-x_e)}$ $K^{(r)}_{(x_r,x-x_e)}$	$K^{(r)}_{(x+1,x+1-x_e)}$ $K^{(r)}_{(x,x-x_e)}$
3.2	76-78	命題 3.1 と 証明の式全体	$K^{(r)}_{(x_r,*-*)}$	$K^{(r)}_{(*,*-*)}$
3.2	77	図 3.3	$x_r - 1$	z 軸の x_{r-1}
3.2	77-78	証明の式全体	$K^{(r)}_{(x_r+1,y+1-x_e)}$ $-K^{(r)}_{(x_r,y-x_e)}$	$K^{(r)}_{(y+1,y+1-x_e)}$ $-K^{(r)}_{(y,y-x_e)}$
3.2	81	下から 9, 5	$r^{(j)}_{(x_e,y,z+1)}$	$r^{(j)}_{(x_e.y,z+1)}$
3.2	82	下から 7	(3.3)	(3.2)
3.2	85	9	$x = x_e$ で 最小値 (負値)	$x = x_e$ で 最大値 (正値)

章節番号	ページ	行	正	誤
3.2	85	10	上昇し	減少し
3.2	85	10	$x = x_r$ では 正の値	$x = x_r$ では 負の値
3.2	85	下から 7	平準積立方式	加入年齢方式
3.3	87	下から 1	$\sum_j \sum_{t_j}$	$\sum_j$ (2 箇所)
3.3	88	1	$\sum_j \sum_{t_j}$	$\sum_j$ (2 箇所)
3.3	89	ページ 全体	$K^{(r)}_{(x_r,*-*)}$	$K^{(r)}_{(*,*-*)}$
3.3	89	上から 2,14	$K^{(r)}_{(x_r+1,y+1-x_e)}$ $-K^{(r)}_{(x_r,y-x_e)}$	$K^{(r)}_{(y+1,y+1-x_e)}$ $-K^{(r)}_{(y,y-x_e)}$
4.1	102	5	b_{x_e+1}	$b_{x_{x_e}+1}$
4.1	107	2	$\int_t^1 \delta\, ds$	$\int_s^1 \delta\, ds$
4.1	107	5,9	$\ddot{a}_\infty$	a_∞
4.1	108	下から 3	$l^{(T)}_{x_e} \dfrac{D_{x_r}}{D_{x_e}} \ddot{a}_{x_r}$	後の項の括弧の $l_{x_r} \dfrac{D_{x_r}}{D_{x_e}} \ddot{a}_{x_r}$
4.1	109	囲み右段 下から 1,2	$l^{(T)}_{x_e}$	l_{x_r}
4.2	119	8	${}^{L}P_{x_e}$	${}^{L}\ P_{x_e}$
4.2	124	下から 8	分子	分母
4.2	125	10	期始	期初
5.2	149	5	(5.9)	(5.9) および (5.10)
5.2	158	下から 6 例題 5.2	$y(x_e \leqq y < x_r)$ における	$y(x_e \leqq y < x_r$ における
5.2	159	下から 8	${}_{x_r-y-1}p_{y+1}$	${}_{x_e-y-1}p_{y+1}$
7.1	201	11	ロトカ	口トカ

章節番号	ページ	行	正	誤
演習問題 2.5	55	15	$\ddot{a}_x \leqq \dfrac{1+i}{i+\varepsilon}$	$\ddot{a}_x < \dfrac{1+i}{1-\varepsilon}$
演習問題 2.8	56	2	$\dfrac{N_x - \frac{5}{8}D_x + \frac{1}{6}\bar{M}_x}{D_x}$	$\dfrac{N_x - \frac{5}{8}D_x + \frac{1}{4}\bar{M}_x}{D_x}$
演習問題 2.15	57	13	(x) に $\dfrac{2}{3}$, (y) に $\dfrac{1}{3}$	(x) に $\dfrac{4}{7}$, (y) に $\dfrac{3}{7}$
演習問題 2.19	58	下から 1	条件の追加：退職者はすべて男性とする. (巻末の計算基数表 p.266 を用いる.)	
演習問題 2.20	59	8	条件の追加：退職者はすべて男性で 60 歳で退職するものと仮定.	
演習問題 3.5	96	下から 2,3	(削除)	(5), (6) の直前の $\sum_{j=t+1}^{x_r-1-x}$ (2 箇所)
演習問題 3.7	97	下から 11	(最終年齢は 100 歳)	(最終年齢)
演習問題 3.7	97	下から 7	G_{20}	G_{x_e}
演習問題 3.8	97	下から 9	$x_e < s \leqq x_r - 1$	$x_e \leqq s < x_r - 1$
演習問題 3.9	99	下から 9	$(m > x_r)$	$(m \geqq 1)$
演習問題 3.9	99	下から 8	残存数	生存数
演習問題 5.11	169	2,3	(2) と (3) の文章を交換	(2) と (3) の文章が逆
演習問題 5.13	170	3	給付は最終給与比例と	定常人口にあるものと
演習問題 5.13	170	表内 B 社欄	$F=40,\ {}^{PS}S^a=25,$ $S^a=60,\ S^p=30$	$F=80,\ {}^{PS}S^a=38,$ $S^a=90,\ S^p=45$
演習問題 5.14	171	囲み下から 2	加入する在職中の	加入する. 在職中の

章節番号	ページ	行	正	誤
演習問題 6.1	192	7	年 2.0%	年 4.0%
演習問題 6.2	192	9	定額基準	定額
演習問題 6.2	192	10	300000 円	220000 円
演習問題 6.2	192	11	PBO	PBO
演習問題 6.3	192	14	400000 円	300000 円
A.1 2.5	254	下から 1	$\dfrac{1}{1-v(1-\varepsilon)}=\dfrac{1+i}{1+\varepsilon}$	$\dfrac{1}{v(1-\varepsilon)}=\dfrac{1+i}{1-\varepsilon}$
A.1 2.8	255	8	「演習問題の解答」を参照 (10 ページ)	(全文差し替え)
A.1 2.14	255	下から 4	①,⑤	①,②,⑤
A.1 2.17	256	1	「演習問題の解答」を参照 (13 ページ)	2 つの実根が誤り
A.1 2.18	256	2	$\sqrt{\dfrac{2\pi}{b}}e^{\frac{a^2}{2b}}\Phi\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2b}}e^{\frac{a^2}{2b}}$
A.1 2.19	256	3	0.681 倍	0.6443 倍
A.1 3.5(7)	257	5	$l_{x+t}b_{x+t}$	$l_{x+j}b_{x+j}$
A.1 3.7(1)	257	下から 4	$\dfrac{e^4-5}{3e^4+1}$	$\dfrac{e^4-3}{e^4+1}$
A.1 3.7(2)	257	下から 1, 2	「演習問題の解答」を参照 (17〜18 ページ)	$\dfrac{20e^{-1}}{e^4+1}\{\cdots\}$
A.1 3.7(3)	258	1	$\dfrac{e^4-e^2-2}{3e^4+1}$	$\dfrac{e^4-e^2-1}{e^4+1}$

章節番号	ページ	行	正	誤
A.1 3.9(1)	258	下から 9	(正) $(x_r - x_e)\left\{1-\left(\frac{100-x_r}{100-x_e}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}^{-1}+x_e$	(誤) $x_r\left\{1-\left(\frac{100-x_r}{100}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}^{-1}$
A.1 3.9(2)	258	下から 7	$\frac{100-x}{100-x_e}-\left(\frac{m-x}{m-x_e}\right)^k$	$\frac{100-x}{100}-\left(\frac{m-x}{m}\right)^k$
A.1 3.9(3)	258	下から 4	$\left(\frac{m-x}{m-x_e}\right)^k$	$\left(\frac{m-x}{m}\right)^k$
A.1 4.2	260	3	①,③,②,④	①,④,③,②
A.1 4.5	260	下から 7	$\frac{B_{dm}-b_{x_r}}{t_{dm}}$	$\frac{B_{dm}x_m - B_m(x_e+t_{dm})}{x_m-(x_e+t_{dm})}$
A.1 4.5	260	下から 7	$B_m - \frac{x_m}{t_{dm}}(B_m - b_{x_r})$	$\frac{B_m - B_{dm}}{x_m-(x_e-t_{dm})}$
A.1 4.6	260	下から 6	(正) $\frac{(S^{f*}+S^{p*}+S^{a*})-(S^p+S^a)}{(G^{f*}+G^{a*})-G^a}$	(誤) $\frac{S^{f*}+(S^{p*}+S^{a*})-(S^p+S^a)}{G^{f*}+(G^{a*}-G^a)}$
A.1 4.10	261	8	$b^e = \frac{B}{L}\frac{b_{x_e}\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x \cdot b_x}$	$b^e = \frac{B}{L}\frac{b_{x_e}}{b_x}$
A.1 4.13	261	14	$e^{\delta t}$	積分記号の中の $e^{-\delta t}$
A.1 4.13(2)	261	下から 6	(正) $\left\{be^{aT}+\frac{\delta}{a+\delta}\left(e^{(a+\delta)^T}-1\right)\right\}$	(誤) $\left(e^{aT}+\frac{e^{-(a+\delta)^T}-1}{a+\delta}\right)$
A.1 4.14	261	下から 2,4	$(1-\alpha)$	α (4 箇所)

章節番号	ページ	行	正	誤
A.1 4.14	262	1	(誤) $\dfrac{\log(vB+C)-\log\left(\dfrac{\alpha}{(1-\beta)C}\right)}{\log(1+i)}$ (正) $\dfrac{\log\{(1-B)vB+(\beta+\alpha)C\}-\log\{(1-\alpha)C\}}{\log(1+i)}$	
A.1 4.15	262	5	$=F_{m-1}(1+j)-\cdots$	$=F_{m-1}-\cdots$
A.1 4.15	262	8-10	$n=\dfrac{\log\left(\dfrac{kj(1+i)}{i-j}+1\right)}{\log(1+j)}$	(全面差し替え)
A.1 5.3(1)	262	下から 5	0.06008	0.06007
A.1 5.4	263	2	F, V, PL, i	F, A, U, i
A.1 5.4(3)	263	7	PL	U
A.1 5.6	263	下から 9	0.3518	0.6266
A.1 5.7(2)	263	下から 4,5	掛金	保険料
A.1 5.9(1)	264	2	$\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y b_y$	$\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_x b_x$
A.1 5.9(1)	264	4	$\left\{0.01\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y\cdots\right\}$	$\left\{\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y\cdots\right\}$
A.1 5.11	264	12-13	(3) 48 ‰，(4) 48， (5) 53 ‰，(6) 89 ‰	(3) 45 ‰，(4) 18， (5) 21 ‰，(6) 56 ‰
A.1 5.12(1)	264	17	ウ．66 ‰	ウ．150 ‰
A.1 5.12(2)	264	20	ウ．76 ‰	ウ．165 ‰

章節番号	ページ	行	正	誤
A.1 5.12(3)	264	21	標準掛金率 $= 47$ ‰, 特別掛金率 $= 48$ ‰,	標準掛金率 $= 42$ ‰ 特別掛金率 $= 44$ ‰
A.1 5.12, 5.13	264	ページ 全体	P_{PSL}	$PSLP$
A.1 5.13	264	下から 2	「演習問題の解答」 を参照 (35 ページ)	(3),(4) を差し替え
A.1 5.14	265	2	$V_1 = 230$ 億円	$V_1 = 230$
A.1 5.14	265	3	「演習問題の解答」 を参照 (35 ページ)	「したがって」 以下の文章
A.1 5.15	265	10	$(3000 + x + 100$ $-200) \times j = 120,$	$(3000 + x + 100 - 200)$ $\times(1 + j) = 3120$
A.1 5.15	265	下から 2,3	(4) $80(= 860 - 780)$, (6) 4180,	(4) 60 (6) 4160

付記：九州大学の落合啓之氏に誤植等を指摘いただきました．記して感謝いたします．

『年金数理』演習問題の解答

以下では，第 2 章から第 6 章までの解答を掲載している．順次，その他の章の解答またはヒントを追加する予定である．(2013 年 4 月 25 日改訂)

第 2 章の演習問題

2.1

$i^m = m\{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\}$ $(i > 0)$ が，m に関して単調減少であることを示す．$x = \dfrac{1}{m}$ とおき

$$f(x) = \frac{(1+i)^x - 1}{x} = \frac{e^{\delta x} - 1}{x}$$

で $f(1) = i$. $f(x)$ の挙動を見るために，$e^{\delta x}$ のテイラー展開を用いると，

$$f(x) = \delta + \frac{1}{2!}\delta^2 x + \frac{1}{3!}\delta^3 x^2 + \cdots \qquad (x > 0)$$

が得られ，$f(0) = \delta$ である．$f(x)$ を微分すると，項別微分可能なので，また，

$$f'(x) = \frac{1}{2!}\delta^2 + \frac{2}{3!}\delta^3 x + \cdots$$

であるので，$x > 0$ に対し，$f'(x) > 0$ であり，$f(x)$ は x の増加関数である．したがって，名称利率 $i^{(m)}$は m に関する減少関数となり，$m \to \infty$ のときに δ に収束する．

2.2

$$p_x = \exp\left\{-\int_0^1 \frac{1}{a-(x+t)}dt\right\} = \frac{a-x-1}{a-x}$$
$$\longrightarrow a = x + \frac{1}{1-p_x}.$$

2.3

$$\mathring{e}_0 = \int_0^a (a-x)^2 \frac{dx}{a^2} = \frac{a}{3} = 80$$

となることから，平均年齢は

$$\bar{x} = \int_0^a x(a-x)^2 \frac{dx}{\left(\frac{a^3}{3}\right)} = \frac{a}{4} = 60.$$

2.4

$$\frac{d}{dx}\mathring{e}_x = \int_0^\infty \frac{d}{dx}\,{}_tp_x dt = \int_0^\infty {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})dt = \mu_x \mathring{e}_x - 1.$$

2.5

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t\,{}_tp_x < \sum_{t=0}^{\infty} v^t(1-\varepsilon)^t = \frac{1}{1-v(1-\varepsilon)} = \frac{1+i}{i+\varepsilon}.$$

2.6

$$\begin{aligned} A_x &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t\,{}_{t-1|}q_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}({}_tp_x - {}_{t+1}p_x) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty}\{(1-d)v^t\,{}_tp_x - v^t\,{}_tp_x\} + 1 = 1 - d\ddot{a}_x. \end{aligned}$$

2.7

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{100-x} v^t \frac{100-(x+t)}{100-x} = \frac{1-v^{100-x}}{100-x}.$$

2.8

$$a_x^{(4)} = \frac{1}{4D_x}\sum_{y=x}^{\omega}\sum_{k=1}^{4}\left\{D_y - \frac{k}{4}(D_y - D_{y+1})\right\} = \frac{N_x - \frac{5}{8}D_x}{D_x}.$$

これに，死亡月に応じた $\frac{1}{12}$，$\frac{2}{12}$，$\frac{3}{12}$ の給付が同確率で発生するものとして，死亡したときの未払い年金の現価 $\frac{1}{6}\frac{\bar{M}_x}{D_x}$ を加える．

2.9

- (x) が生存中は (y) または (z) と共存していることを条件に，(x) は A を受け取る：$A(a_{xy}+a_{zx}-a_{xyz})$.
- (y) は (x) と共存している場合に B を受け取る：Ba_{xy}.
- (z) は (x) と共存している場合に B を受け取る：Ba_{zx}.
- (x) が死亡後，(y), (z) が共存している場合に合わせて $A+B$ の年金を受け取る：$(A+B)(a_{yz}-a_{xyz})$.
- (y) のみが生存している場合，(y) は年金額 A を受け取る：$A(a_y-a_{yz}-a_{xy}+a_{xyz})$.
- (z) のみが生存している場合，(z) は年金額 A を受け取る：$A(a_z-a_{zx}-a_{yz}+a_{xyz})$.

これらを合計すると

$$A(a_y+a_z-a_{yz})+B(a_{xy}+a_{xz}+a_{yz}-a_{xyz}).$$

2.10

年金額は $(10+n)$ から始まり n で終わる $(n+1)$ 年変動生命年金である．よって，

$$10\ddot{a}_{x:\overline{n+1}|}+(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}=\frac{10(N_x-N_{x+n+1})}{D_x}+\frac{nN_x-S_{x+1}-S_{x+n+1}}{D_x}.$$

2.11

当初の人口は $L_0=l_0e_0$ だったが，出生数が α 倍になったとすると，t 年後の人口 L_t は,

$$\begin{cases}\alpha(l_0e_0-l_te_t)=\alpha(l_0e_0-l_0\,{}_tp_0e_t)=\alpha l_0(e_0-\,{}_tp_0e_t) & (x<t),\\ l_te_t=l_0\,{}_tp_0e_t & (x\geqq t).\end{cases}$$

よって，総人口の増加率 β は,

$$\beta l_0e_0=\alpha l_0(e_0-\,{}_tp_0e_t)+l_0\,{}_tp_0e_t$$

より,

$$\beta=\alpha\left(1-\,{}_tp_0\frac{e_t}{e_0}\right)+\,{}_tp_0\frac{e_t}{e_0}=\alpha+(1-\alpha)\,{}_tp_0\frac{e_t}{e_0}.$$

ここで，$\alpha = 0.5,\ t = 10,\ e_0 = 70,\ e_{10} = 65$ から

$$\beta = 0.5 + 0.5\left(\frac{130}{140}\right)\left(\frac{65}{70}\right) = 0.931.$$

よって，93.1%.

2.12

微分すると $\dfrac{d}{dx}\mathring{e}_x = -k$ が成り立つ．演習問題 2.4 より，

$$\frac{d}{dx}\mathring{e}_x = \mu_x \mathring{e}_x - 1$$

となることから，

$$\mu_x = \frac{1-k}{k}\frac{1}{\omega - x}.$$

よって

$$q_x = 1 - \exp\left\{-\frac{1-k}{k}\int_0^1 \frac{1}{\omega - x - t}dt\right\} = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega - x}\right)^{\frac{1-k}{k}}.$$

2.13

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n \ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)^n \frac{1-v^n}{1-v}.$$

これから，

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} = \frac{1-v}{1-v^n}(1-v^n) = 1 - v = d.$$

2.14

① ${}_{n|}a_{\overline{n}|} = v^n \cdot a_{\overline{n}|}$：(◯)

② $a_{x|y} = a_x - a_{xy}$：(◯) $\longrightarrow$: (×)．正しくは $a_{x|y} = a_y - a_{xy}$.

③ $\ddot{a}_\infty = i$：(×) $\longrightarrow \ddot{a}_\infty = \dfrac{1}{1-v} = \dfrac{1+i}{i}$.

④ $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \ddot{s}^{(m)}_{\overline{1}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$: (×)

⑤ ${}_{n|}\ddot{a}_{\overline{xy}} = {}_{n|}\ddot{a}_x + {}_{n|}\ddot{a}_y - {}_{n|}\ddot{a}_{xy}$: (◯)

2.15

$$(x) : \frac{2}{4}a_{xyz} + \frac{2}{3}(a_{xy} - a_{xyz}) + \frac{2}{3}(a_{xz} - a_{xyz}) + (a_x - a_{xy} - a_{zx} + a_{xyz})$$

$$= \frac{2}{4}5 + \frac{2}{3}(6-5) + \frac{2}{3}(7-5) + (10-6-7+5) = 6\frac{1}{2}.$$

$$(y) : \frac{1}{4}a_{xyz} + \frac{1}{3}(a_{xy} - a_{xyz}) + \frac{1}{2}(a_{yz} - a_{xyz}) + (a_y - a_{xy} - a_{yz} + a_{xyz})$$

$$= \frac{1}{4}5 + \frac{1}{3}(6-5) + \frac{1}{2}(9-5) + (15-9-6+5) = 8\frac{7}{12}.$$

$$(z) : \frac{1}{4}a_{xyz} + \frac{1}{3}(a_{xz} - a_{xyz}) + \frac{1}{2}(a_{yz} - a_{xyz}) + (a_z - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz})$$

$$= \frac{1}{4}5 + \frac{1}{3}(7-5) + \frac{1}{2}(9-5) + (20-9-7+5) = 12\frac{11}{12}.$$

2.16

① $\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}} - \dfrac{1}{s_{\overline{n}|}} = i : (◯)$

② $a_{xy} = a_{\overline{xy}} - a_{\overline{xy}}^{[1]} : (◯)$

③ $I\ddot{a}_{\overline{n}|} = \left(1 + \dfrac{1}{i}\right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} - \dfrac{n \cdot v^{n-1}}{i} : (◯)$

④ $Ia_{\overline{n}|} = \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - (n+1) \cdot v^n}{i} : (\times)$

⑤ $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \dfrac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_x}{D_x} : (\times)$

2.17

資産残高が一致する条件は

$$\int_0^t \delta_s^A ds = \int_0^t \delta_s^B ds$$

である．この計算を実行すると，

$$at + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{3}ct^3 = ft + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{3}ht^3$$

となる．この 3 次方程式が 0 以外に 2 つの正の実根を持つ条件は，$b < g$ かつ判別式

$$D = \frac{1}{4}(b-g)^2 - \frac{4}{3}(a-f)(c-h) > 0.$$

したがって，2 つの時点は，

$$T_1(T_2) = \frac{-3(b-g) \pm 3\sqrt{(b-g)^2 - \frac{16}{3}(a-f)(c-h)}}{4(c-h)}.$$

2.18

$$\begin{aligned}
a_{\overline{\infty}|} &= \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i},\\
\ddot{a}_{\overline{\infty}|} &= \frac{1}{1-v} = \frac{1+i}{i} = \frac{1}{d},\\
\bar{a}_{\overline{\infty}|} &= \frac{1}{\delta},\\
\bar{a}^{(\delta(t))}_{\overline{\infty}|} &= \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^t (a+bs)\,ds\right\}dt\\
&= \int_0^\infty e^{-at-\frac{b}{2}t^2}dt\\
&= e^{\frac{a^2}{2b}}\int_0^\infty e^{-\frac{b}{2}(t+\frac{a}{b})^2}dt\\
&= e^{\frac{a^2}{2b}}\int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\frac{2\pi}{b}}e^{\frac{a^2}{2b}}\varPhi\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right).
\end{aligned}$$

ここで，$u=\sqrt{b}\left(t+\dfrac{a}{b}\right)$ と変数変換している．$\varPhi$ は標準正規分布の分布関数を表す.

(補足)　なお，$\delta(t)=bt$ としたときには，

$$\bar{a}^{(\delta(t))}_{\overline{\infty}|} = \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^t (bs)\,ds\right\}dt = \int_0^\infty e^{-\frac{b}{2}t^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}.$$

2.19

$$\frac{(\ddot{a}^{(1.5\%)}_{\overline{15}|})^{-1}\left(\ddot{a}^{(2.5\%)}_{\overline{15}|}+\dfrac{N_{75}}{D_{60}}\right)}{\left(\ddot{a}^{(2.5\%)}_{\overline{10}|}\right)^{-1}\left(\ddot{a}^{(2.5\%)}_{\overline{10}|}+\dfrac{N_{70}}{D_{60}}\right)} = 0.681 \text{ 倍}.$$

2.20

問題の趣旨がとりにくいとの意見が寄せられたため，補足説明をすると以下のとおり.

変更前の年金額は，一時金の 50 %を 2.5 %の確定年金現価で割ったものである．元の年金原資を維持するという意味は，年金現価率を 2.5 %から 1.5 %に引き下げたときも，

「2.5 %の保証期間付終身年金現価」=「1.5 %の確定年金現価」

となるように年金額を増やすという意味であった.

このとき，退職金の追加移行割合は，

$$\frac{0.5\left(\dfrac{N_{75}^{2.5\%}}{D_{60}^{2.5\%}}\right)}{\ddot{a}_{\overline{15}|}^{(2.5\%)}}=0.2265\ [22.65\%].$$

変更後の年金給付の増加割合は，旧年金額 $\times\dfrac{N_{75}^{2.5\%}}{D_{60}^{2.5\%}}$ なので，

$$\frac{\left(\dfrac{N_{75}^{2.5\%}}{D_{60}^{2.5\%}}\right)}{\ddot{a}_{\overline{15}|}^{(1.5\%)}}=0.4245\ [42.45\%].$$

また，もし年金現価率を変更前後で同じ 2.5 %を使用するものとすると，変更後の年金額を A とおくと，

$$\frac{0.5}{\ddot{a}^{(2.5\%)}}\left(\ddot{a}^{(1.5\%)}+\frac{N_{75}^{2.5\%}}{D_{60}^{2.5\%}}\right)=\frac{0.5+A}{\ddot{a}^{(1.5\%)}}\ddot{a}^{(2.5\%)}$$

なので，

$$A=\frac{0.5}{\ddot{a}^{(2.5\%)}}\left(\ddot{a}^{(1.5\%)}+\frac{N_{75}^{2.5\%}}{D_{60}^{2.5\%}}\right)\frac{\ddot{a}^{(1.5\%)}}{\ddot{a}^{(2.5\%)}}-0.5$$

となる.

第 3 章の演習問題

3.1

$$\begin{aligned}S_{(x,t)}^{a}=\sum_{j\neq r}\int_{0}^{x_r-x}&K_{(x,t,s)}^{(j)}\ {}_{s}p_{x}^{(T)}\mu_{x+s}^{(j)}\,e^{-\delta s}ds\\&+K_{(x,t,x_r-x)}^{(r)}\ {}_{x_r-x}p_{x}^{(T)}\,e^{-\delta(x_r-x)}.\end{aligned}$$

3.2

(1)　x_e 歳の給付現価は $\dfrac{D_{x_r}}{D_{x_e}}\ddot{a}_{x_r}$，$x_e$ 歳の収入現価は ${}^{L}P\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\dfrac{D_x}{D_{x_e}}$ なので，これから，${}^{L}P=\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x}$.

(2)　$S^f=\dfrac{v}{d}l_{x_e}^{(T)}\dfrac{D_{x_r}}{D_{x_e}}\ddot{a}_{x_r}$,　$G^f=\dfrac{v}{d}l_{x_e}^{(T)}\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\dfrac{D_x}{D_{x_e}}$.

3.3

個人平準保険料方式の設立時の掛金 P_x は,

$$\begin{cases} P_x = \ddot{a}_{x_r} & (x \geqq x_r), \\ P_x = \dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{\sum\limits_{y=x}^{x_r-1} D_y} & (x_e < x \leqq x_r - 1), \\ P_{x_e} = \dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{\sum\limits_{y=x_e}^{x_r-1} D_y} & (x = x_e\text{;将来新規加入者}) \end{cases}$$

より,個人平準保険料方式の掛金収入現価は,

$$\begin{aligned} &\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \ddot{a}_x + \sum_{x=x_e}^{x_r-1} P_x \frac{N_{x_e} - N_{x_r}}{D_x} + \frac{v}{d} l_{x_e}^{(T)} P_{x_e} \frac{N_{x_e} - N_{x_r}}{D_{x_e}} \\ &= \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \ddot{a}_x + \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x} + \frac{v}{d} l_{x_e}^{(T)} \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}} \\ &= S^p + S^a + S^f \end{aligned}$$

であるが,平準保険料方式の掛金収入現価は,

$$\frac{1}{d}\, {}^{L}P \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} = {}^{L}P(G^a + G^f) = {}^{L}PG^a + S^f$$

なので,差額は $S^p + S^a - {}^{L}PG^a$ となる.

3.4

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{y=x_e}^{x_r-1} \frac{D_y}{D_x} \cdot {}^{L}P_{(x,t)} \right) \\ &= \sum_{y=x_e}^{x_r-1} \frac{D_y}{D_{x_e}} \left(\frac{\sum\limits_{x=x_e}^{x_r-1} \sum\limits_j C_x^{(j)} K_{(x+1,x+1-x_e)}^{(j)} + D_{x_r} K_{(x_r,x_r-x_e)}^{(j)}}{\sum\limits_{x=x_e}^{x_r-1} D_x} \right) \\ &= \frac{\sum\limits_{x=x_e}^{x_r-1} \sum\limits_j C_x^{(j)} K_{(x+1,x+1-x_e)}^{(j)} + D_{x_r} K_{(x_r,x_r-x_e)}^{(j)}}{D_{x_e}} \end{aligned}$$

となり,上式は x_e 歳の加入者の給付現価と一致する.したがって,$V_{(x_e,x_e)} = 0$.

3.5

(1) $d_{x+j} b_{x+j} v^{j-t+\frac{1}{2}}$, (2) $l_{x+j} b_{x+j} v^{j-t}$, (3) $d_{x+j} b_{x+j} v^{j-(t+1)+\frac{1}{2}}$,

(4) $l_{x+j}b_{x+j}v^{j-(t+1)}$, (5) $d_{x+t}b_{x+t}v^{-\frac{1}{2}}$, (6) $l_{x+t}b_{x+t}v^{-1}$,

(7) $l_{x+t}b_{x+t}$, (8) $(1+i)$, (9) $\dfrac{d_{x+t}}{l_{x+t}}(1+i)^{\frac{1}{2}}$, (10) $({}_tV_x+P_x)$.

3.6

$$^{OAN}C = {}^{OAN}P\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}, \qquad {}^{UC}C = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} {}^{UC}P_x l_x^{(T)}$$

である．一方，定常状態において，開放基金方式と単位積立方式の積立金は等しいので，極限方程式 $(C+dF=B)$ から ${}^{OAN}C = {}^{UC}C$ が得られる．したがって，

$$^{OAN}P\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} {}^{UC}P_x l_x^{(T)}$$

より，

$$^{OAN}P = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} {}^{UC}P_x l_x^{(T)}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}}$$

となり，これは題意を示している．

3.7

$$\begin{aligned}
(1)\quad S_{20} &= \int_0^{80} te^{-\delta t}\,{}_tp_{20}\mu_{20+t}dt = \int_0^{80}\frac{1}{80}te^{-0.05t}dt \\
&= \frac{1}{80}\left\{\frac{1}{0.05^2} - \left(\frac{80}{0.05}+\frac{1}{0.05^2}\right)e^{-4}\right\} = 5-25e^{-4}, \\
G_{20} &= \int_0^{80} e^{-\delta t}\,{}_tp_{20}dt = \int_0^{80} e^{-0.05t}\left(1-\frac{t}{80}\right)dt \\
&= 20(1-e^{-4}) - (5-25e^{-4}) = 15+5e^{-4}.
\end{aligned}$$

前者を後者で割って，$P_{20} = \dfrac{e^4-5}{3e^4+1}$.

$$\begin{aligned}
(2)\quad S_{(20,20+t)} &= \int_{20+t}^{100}(y-20)\,{}_{y-(20+t)}p_{20+t}\,\mu_y\,e^{-0.05(y-20-t)}dy \\
&= \frac{1}{80-t}\int_{20+t}^{100}(y-20)e^{-0.05(y-20-t)}dy \\
&= \frac{1}{80-t}\left\{\left[-\frac{(y-20)e^{-0.05(y-20-t)}}{0.05}\right]_{20+t}^{100}\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad +\frac{1}{0.05}\int_{20+t}^{100} e^{-0.05(y-20-t)}dy\Big\}\\
&= \frac{1}{80-t}\left\{20(t-80e^{-0.05(y-20-t)})\right.\\
&\qquad \left. -\frac{1}{0.05^2}[e^{-0.05(y-20-t)}]_{20+t}^{100}\right\}\\
&= \frac{1}{80-t}\left\{20(t-80e^{-0.05(y-20-t)}) - 400(e^{-0.05(80-t)}-1)\right\}\\
&= \frac{1}{80-t}\left\{400+20t-2000e^{-0.05(80-t)}\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{(20,20+t)} &= \int_{20+t}^{100}(y-20)\,{}_{y-(20+t)}p_{20+t}\,e^{-0.05(y-20-t)}dy\\
&= \frac{1}{80-t}\int_{20+t}^{100}(100-y)e^{-0.05(y-20-t)}dy\\
&= \frac{1}{80-t}\left\{\left[-\frac{(y-20)e^{-0.05(100-y)}}{0.05}\right]_{20+t}^{100}\right.\\
&\qquad \left. -\frac{1}{0.05}\int_{20+t}^{100} e^{-0.05(y-20-t)}dy\right\}\\
&= \frac{1}{80-t}\left\{20(80-t) - \left[\frac{e^{-0.05(y-20-t)}}{0.05^2}\right]_{20+t}^{100}\right\}\\
&= \frac{1}{80-t}\left\{20(80-t)-400(e^{-0.05(y-20-t)}-1)\right\}\\
&= \frac{1}{80-t}\left\{1200-20t+400e^{-0.05(y-20-t)}\right\}.
\end{aligned}
$$

これから,

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{20} &= S_{(20,20+t)} - P_{20}G_{(20,20+t)}\\
&= \frac{1}{80-t}\left\{400+20t-2000e^{-0.05(80-t)}\right\}\\
&\quad -\frac{{}^LP}{80-t}\left\{1200-20t+400e^{-0.05(y-20-t)}\right\}\\
&= \frac{(3e^2+1)\{400+20t-2000e^{-0.05(80-t)}\}}{(80-t)(3e^4+1)}\\
&\quad -\frac{(e^4-5)\{1200-20t+400e^{-0.05(y-20-t)}\}}{(80-t)(3e^4+1)}\\
&= \frac{80}{80-t}\frac{(80-t)+e^4(t-80e^{-0.05(80-t)})}{3e^4+1}.
\end{aligned}
$$

(3) $$S_{20} = \frac{1}{80}\int_0^{40} te^{-0.05t}dt + \frac{1}{80}\int_{40}^{80} 40e^{-0.05t}dt$$
$$= (5-15e^{-2}) + (10e^{-2}-10e^{-4}) = 5-5e^{-2}-10e^{-4}.$$

これから，$P_{20}^{*} = \dfrac{e^4-e^2-2}{3e^4+1}$.

3.8

(1) $$P_{x_e}^{A} = \frac{2D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x\left(1+\dfrac{x-x_e}{x_r-x_e}\right)},$$
$$P_{x_e}^{B} = \frac{2D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{s-1} D_x\left\{1+\left(\dfrac{x_r-x_e}{s-x_e}\right)^2\left(\dfrac{x-x_e}{x_r-x_e}\right)^2\right\}+2\sum_{x=s}^{x_r-1} D_x}.$$

(2) 制度変更前後の脱退残存表による基数を D_x^A および D_x^B と置くと，$l_{x_r}^A = l_{x_r}^B$ より $D_{x_r}^A = D_{x_r}^B$ となる．したがって，標準掛金の分母に着目すると，

$$H(s) = \sum_{x=x_e}^{x_r-1}(D_x^A - D_x^B)$$
$$= \sum_{x=x_e}^{s} D_x\left(\frac{x-x_e}{x_r-x_e}-\left(\frac{x-x_e}{s-x_e}\right)^2\right) - \sum_{x=s+1}^{x_r} D_x\left(1-\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\right)$$

となり，$H(s)$ は s の単調減少の連続関数となっている．しかも，$H(x_e) < 0$ かつ $H(x_r - 1) > 0$ であるので，$s = m$ の前後で大小の転換点がただ 1 つある．

(3) 給付現価はどちらも $2D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}$ である．したがって，標準掛金率が同じであれば，給与現価の大小で責任準備金の大小が決まる．ところが，$s = m$ に固定して

$$G(x) = \sum_{y=x}^{x_r-1}(D_x^A - D_x^B)$$

を考えると，この関数は $G(x_e) = G(x_r) = 0$ かつ $G''(x) < 0$ であることが容易に確かめられ，$G(x) \geqq 0\,(x_e \geqq x \geqq x_r)$．したがって，$A$ の給与現価のほうが大きいため責任準備金は B のほうが大きい．

3.9

(1)

$$_{x_r}p_0^A = \frac{100-x_r}{100-x_e} = \left(\frac{m-x_r}{m-x_e}\right)^k = {}_{x_r}p_0^B$$

より，

$$m = (x_r - x_e)\left\{1 - \left(\frac{100 - x_r}{100 - x_e}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}^{-1} + x_e.$$

(2)　上の関係があるとき，標準掛金率は，$\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x^{A,B}}$ なので，分子は同じ．分母が問題となるが，

$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x^A - \sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x^B = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} v^x \left\{\frac{100 - x}{100 - x_e} - \left(\frac{m - x}{m - x_e}\right)^k\right\}$$

の中括弧の中を $f(x)$ とおくと，

$$f'(x) = -\frac{1}{100 - x_e} + \frac{k}{m - x_e}\left(1 - \frac{m - x}{m - x_e}\right)^{k-1},$$

$$f''(x) = \frac{k(k-1)}{(m - x_e)^2}\left(\frac{m - x}{m - x_e}\right)^{k-2} < 0$$

となる．したがって，両端が 0 で上に凸な関数なので，$f(x) > 0$.

人数現価は A の方が大きいので，$P_{x_e}^A < P_{x_e}^B$.

(3)　$g(k) = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x^B = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} v^x \left(\dfrac{m - x}{m - x_e}\right)^k$ を k の関数と考え，k で微分すると，

$$g'(k) = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} v^x \log\left(\frac{m - x}{m - x_e}\right)\left(\frac{m - x}{m - x_e}\right)^k$$

となり，$\log\left(\dfrac{m - x}{m - x_e}\right) < 0$ により $g'(k) < 0$ となるので負である．したがって k に関して単調減少となり，$k = 1$ で最小となる．

3.10

(1)　y 歳で生存脱退した場合，x_r 歳まで生存すれば，$\dfrac{y - x_e}{x_r - x_e}$ の終身年金を支給するので，

$$S_x = \sum_{y=x}^{x_r-1} \frac{{}^*C_y^{(w)}}{{}^*D_y}\frac{D_{x_r}}{D_{y+1}}\frac{y - x_e}{x_r - x_e}\ddot{a}_{x_r} + \frac{{}^*D_{x_r}}{{}^*D_x}\ddot{a}_{x_r}.$$

(2) $$ {}^{E}P_{x_e} = \frac{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} {}^{*}C_y^{(w)} \frac{D_{x_r}}{D_{y+1}} \frac{y-x_e}{x_r-x_e} \ddot{a}_{x_r} + {}^{*}D_{x_r} \ddot{a}_{x_r}}{\displaystyle\sum_{y=x_e}^{x_r-1} {}^{*}D_y}. $$

(3) x 歳の加入者の過去期間分の給付現価は 3.10(1) のうちの，過去期間 $(x-x_e)$ 相当分

$$ {}^{PS}S_x^a = \frac{x-x_e}{x_r-x_e} \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} \frac{{}^{*}C_y^{(w)}}{{}^{*}D_y} \frac{D_{x_r}}{D_{y+1}} + \frac{{}^{*}D_{x_r}}{{}^{*}D_x} \right) \ddot{a}_{x_r} $$

である．ここで，

$$ {}^{*}C_y^{(w)} = {}^{*}D_y \left(\frac{D_{y+1}}{D_y} - \frac{{}^{*}D_{y+1}}{{}^{*}D_y} \right) $$

より，

$$ \begin{aligned} {}^{PS}S_x^a &= \frac{x-x_e}{x_r-x_e} \left\{ \sum_{y=x}^{x_r-1} \frac{{}^{*}D_y}{{}^{*}D_x} \left(\frac{D_{y+1}}{D_y} - \frac{{}^{*}D_{y+1}}{{}^{*}D_y} \right) \frac{D_{x_r}}{D_{y+1}} + \frac{{}^{*}D_{x_r}}{{}^{*}D_x} \right\} \ddot{a}_{x_r} \\ &= \frac{x-x_e}{x_r-x_e} \left\{ \sum_{y=x}^{x_r-1} \frac{D_{x_r}}{{}^{*}D_x} \left(\frac{{}^{*}D_y}{D_y} - \frac{{}^{*}D_{y+1}}{D_{y+1}} \right) + \frac{{}^{*}D_{x_r}}{{}^{*}D_x} \right\} \ddot{a}_{x_r} \\ &= \frac{x-x_e}{x_r-x_e} \left\{ \frac{D_{x_r}}{{}^{*}D_x} \left(\frac{{}^{*}D_x}{D_x} - \frac{{}^{*}D_{x_r}}{D_{x_r}} \right) + \frac{{}^{*}D_{x_r}}{{}^{*}D_x} \right\} \ddot{a}_{x_r} \\ &= \frac{x-x_e}{x_r-x_e} \frac{D_{x_r}}{D_x} \ddot{a}_{x_r}. \end{aligned} $$

これは，過去期間分の年金現価を表しており，脱退率には影響を受けない．

(4) 開放基金方式を採用した場合，責任準備金は過去期間分の給付現価となる．制度導入時には，過去期間分の給付現価相当の積立金を保有しているため過去勤務債務は存在しない．このため脱退率の変動により責任準備金が変動することはなく，未積立債務が発生することもない．

第 4 章の演習問題

4.1

補題 4.1 の証明

$$ \begin{aligned} \left(1 - \frac{L}{G^a}\right)(1+i) &= \frac{G^a - d(G^a + G^f)}{G^a v} = \frac{(1-d)G^a - dG^f}{G^a v} \\ &= 1 - \frac{dG^f}{vG^a} < 1. \end{aligned} $$

補題 4.2 の証明

$$\begin{aligned} G^a &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left(l_x^{(T)}\sum_{y=x}^{x_r-1}\frac{D_y}{D_x}\right) \\ &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} + \sum_{x=x_e}^{x_r-2}\left(l_x^{(T)}\sum_{y=x+1}^{x_r-1}\frac{D_y}{D_x}\right) \\ &> L. \end{aligned}$$

4.2

高いほうから順番は，①加入時積立方式，③平準積立方式，②単位積立方式，④退職時年金現価積立方式である．

4.3

① 加入時積立方式：(C)+(G)

② 完全積立方式：(D)+(E)+(G)

③ 退職時年金現価積立方式：(F)

④ 単位積立方式：(A)+(G)

⑤ 平準積立方式：(B)+(G)

4.4

極限方程式は ${}^LC + d\,{}^LF = B$．これから，

$${}^LF = \frac{B}{d} - \frac{{}^LC}{d} = S^p + S^a + S^f - {}^LP(G^a + G^f) = S^p + S^a - {}^LPG^a.$$

4.5

脱退が連続的に発生するものとすると，$B_x = ax + b$ を代入することにより，以下の関係式が成り立つ．

$$(1) \qquad x_m = \frac{\displaystyle\int_{x_e}^{x_r-1} x l_x dx}{\displaystyle\int_{x_e}^{x_r-1} l_x dx},$$

$$(2) \qquad B_m = \frac{\displaystyle\int_{x_e}^{x_r-1} l_x B_x dx}{\displaystyle\int_{x_e}^{x_r-1} l_x dx} = ax_m + b,$$

$$(3)\qquad t_{dm} = \frac{\displaystyle\int_{x_e}^{x_r-1} l_x\mu_x(x-x_e)dx}{\displaystyle\int_{x_e}^{x_r-1} l_x\mu_x dx + l_{x_r}} = \frac{\displaystyle\int_{x_e}^{x_r-1} l_x dx}{l_x},$$

$$(4)\qquad B_{dm} = \frac{\displaystyle\int_{x_e}^{x_r-1} l_x\mu_x b_x dx}{\displaystyle\int_{x_e}^{x_r-1} l_x\mu_x dx + l_{x_r}} = \frac{\displaystyle\int_{x_e}^{x_r-1} (-l_x)' b_x dx + l_{x_r}b_{x_r}}{l_{x_r}}$$

$$= \frac{[-l_x b_x]_{x_e}^{x_r} + \displaystyle\int_{x_e}^{x_r-1} l_x(b_x')dx + l_{x_r}b_{x_r}}{l_{x_r}}$$

$$= b_{x_r} + a\frac{\displaystyle\int_{x_e}^{x_r-1} l_x dx}{l_x}.$$

これから a と b の連立方程式が得られる．これを解くことにより，

$$a = \frac{B_{dm} - b_{x_r}}{t_{dm}}, \qquad b = B_m - \frac{x_m}{t_{dm}}(B_m - b_{x_r}).$$

4.6

収束している状態の積立金を F とすると，特別保険料は

$$\frac{S^p + S^a - {}^{E}P\cdot G^q - F}{G^a}$$

と表されるので，標準保険料と特別保険料の合計は

$$\frac{S^p + S^a - F}{G^a}$$

である．これは，運用利回り j によって収束するので，

$$\left(F + \frac{S^p + S^a - F}{G^a}L - B\right)(1+j) = F$$

となる．$u = \dfrac{1}{1+j}$ とおいて，整理すると

$$FG^a + (S^p + S^a - F)L - BG^a = FuG^a$$

$$F = \frac{(S^p + S^a)L - BG^a}{L - (1-u)G^a}$$

ここで，j を予定利率と考えると，

$$B = (1-u)(S^{p*} + S^{a*} + S^{f*}), \qquad L = (1-u)(G^{a*} + G^{f*})$$

が成り立つ．この関係式を F に当てはめると，

$$F = \frac{(S^p + S^a)(G^{a*} + G^{f*}) - (S^{p*} + S^{a*} + S^{f*})G^a}{(G^{a*} + G^{f*}) - G^a},$$

したがって，標準保険料と特別保険料の合計は，

$$P^* = \frac{(S^{p*} + S^{a*} + S^{f*}) - (S^p + S^a)}{(G^{a*} + G^{f*}) - G^a}.$$

4.7

定常状態のファンドの収支を考える．A ファンドは，掛金 P，給付 S_A，移管金 Q，B ファンドは，給付 S_B，受入金 Q である．定常状態であるので極限方程式により，

$$A : \delta_A F^A + P = S_A + Q, \qquad B : \delta_B F^B + Q = S_B$$

となることから

$$\frac{F^A}{F^B} = \frac{\delta_B}{\delta_A}\frac{S_A + Q - P}{S_B - Q}.$$

4.8

$$\frac{{}^{P}C}{d} = S^p + S^a + S^f, \qquad \frac{{}^{T}C}{d} = {}^{T}C + S^a + S^f,$$
$$\frac{{}^{UC}C}{d} = {}^{SF}S^a + S^f, \qquad \frac{{}^{In}C}{d} = {}^{In}C + S^f$$

と $d = 1 - v$ により，

(1) $S^f = \dfrac{{}^{In}C}{1-v} - {}^{In}C,$

(2) $${}^{PS}S^a = \frac{{}^{UC}C}{1-v} - S^f = \frac{{}^{UC}C}{1-v} - \frac{{}^{In}C}{1-v} + {}^{In}C,$$

(3) $$S^a = \frac{{}^{T}C}{1-v} - {}^{T}C - S^f = \left(\frac{{}^{T}C}{1-v} - {}^{T}C\right) - \left(\frac{{}^{In}C}{1-v} - {}^{In}C\right),$$

(4) $S^p = \dfrac{{}^{P}C}{1-v} - S^a - S^f$

$= \dfrac{{}^{P}C}{1-v} - \left(\dfrac{{}^{T}C}{1-v} - {}^{T}C\right).$

4.9

(1) ${}^{UC}P_x = \dfrac{1}{x_r - x_e}\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x} = \dfrac{1}{x_r - x_e}\dfrac{(1+i)^x}{l_x}D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}$

は増加関数なので,

$${}^{UC}P_y = \frac{1}{x_r - x_e}\frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_y} \longrightarrow D_y\,{}^{UC}P_y = \frac{1}{x_r - x_e}D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}.$$

両辺の y を x から $(x_r - 1)$ まで加えると

$$\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y\,{}^{UC}P_y = \frac{x_r - x}{x_r - x_e}D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}.$$

すなわち,

$${}^{A}P_x = \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y\,{}^{UC}P_y}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}$$

であり，題意が示された.

(2) $${}^{A}P_{x+1} - {}^{A}P_x = \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e}\left\{\frac{x_r - x - 1}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y} - \frac{x_r - x}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}\right\}$$

$$= \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e}\left\{\frac{(x_r - x - 1)\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - \sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y}{\sum_{y=x+1}^{x_r-x} D_y \sum_{y=x}^{x_r-x} D_y}\right\}$$

$$= \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e}\left\{\frac{(x_r - x - 1)D_x - \sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y}{\sum_{y=x+1}^{x_r-x} D_y \sum_{y=x}^{x_r-x} D_y}\right\}$$

$$= \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e} \frac{\sum_{y=x+1}^{x_r-1}(D_x - D_y)}{\sum_{y=x+1}^{x_r-x} D_y \sum_{y=x}^{x_r-x} D_y} > 0.$$

すなわち，${}^{A}P_x$ は x に関して単調増加.

4.10

新規加入者数を l^e，給与を b^e とすると，

$$l^e \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{l_x}{l_{x_e}} = L \longrightarrow l^e = \frac{L}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{l_x}{l_{x_e}}}.$$

また総給与 B は,

$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left(l^e \frac{l_x}{l_{x_e}} \right) \left(b^e \frac{b_x}{b_{x_e}} \right) = B$$

が成り立つ．よって，

$$b^e = \frac{l_{x_e} b_{x_e} B}{l^e \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x b_x} = \frac{B}{L} \frac{b_{x_e} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x b_x}.$$

4.11

定年給付の現価は

$$30 \left(0.96 \times \frac{1.03}{1.02} \right)^{30} = 30 \left(0.29386 \times \frac{2.42726}{1.81136} \right) = 11.8132,$$

給与現価は

$$\frac{1 - \left(0.96 \times \frac{1.03}{1.02} \right)^{30}}{1 - \left(0.96 \times \frac{1.03}{1.02} \right)} = 19.8188.$$

よって，定年給付のみの標準掛金率は 0.5960．定年以外は $1 - 0.596 = 0.404$．したがって求める標準掛金率は，$0.596 + 0.404 \dfrac{0.6}{0.8} = 0.90$.

4.12

(1) エ．加入時積立方式，(2) カ．賦課方式，(3) オ．単位積立方式,

(4) ア．退職時年金現価積立方式

4.13

極限方程式は，$[t, t+dt)$ $(t > T)$ の区間で

$$cdt + \delta F(t)dt = B(T)dt$$

である．よって，$c = B(T) - \delta F(t)$ が成立しなければならない．$F(T)$ は，

$$F(T) = \int_0^T (c - B(t))e^{\delta t}dt$$

を計算して求める．

(1)

$$F(T) = \int_0^T (c - at)e^{\delta t}dt = \frac{c}{\delta}(e^{\delta T} - 1) - \frac{a}{\delta}\left(Te^{\delta T} - \frac{e^{\delta T} - 1}{\delta}\right)$$

であり，$c + \delta F(T) = aT$.

よって，

$$c = aT - \delta F(T) \longrightarrow c = a\{(T + \delta^{-1})e^{-\delta T} + (T - \delta^{-1})\}.$$

(2)

$$F(T) = \int_0^T (c - b^{at})e^{\delta t}dt = \frac{c}{\delta}(e^{\delta T} - 1) - \frac{b}{a+\delta}(e^{(a+\delta)T} - 1)$$

であり，$c + \delta F(T) = be^{aT}$.

よって，

$$c = be^{(a-\delta)T} + \frac{b\delta}{a+\delta}(e^{aT} - e^{-\delta T})$$
$$\longrightarrow c = be^{-\delta T}\left\{be^{aT} + \frac{\delta}{a+\delta}(e^{(a+\delta)T} - 1)\right\}.$$

4.14

予定よりも $(1-\alpha)C$ の掛金が毎年減少するため，n 年度の積立金は，$F - (1 - \alpha)C\ddot{s}_{\overline{n|}}$ となる．よって，

$$F - (1-\alpha)C\ddot{s}_{\overline{n|}} = F - (1-\alpha)C(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} < \beta F$$
$$\Longleftrightarrow (1-\beta)F < (1-\alpha)C(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$\Longleftrightarrow (1-\beta)dF < (1-\alpha)C\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff (1-\beta)(vB-C) < (1-\alpha)C\frac{(1+i)^n-1}{i} \\
&\iff (1-\alpha)C(1+i)^n > (1-\beta)vB + (\beta-\alpha)C \\
&\iff (1+i)^n > \frac{(1-\beta)vB+(\beta-\alpha)C}{(1-\alpha)C} \\
&\iff n > \frac{\log\{(1-\beta)vB+(\beta-\alpha)C\} - \log\{(1-\alpha)C\}}{\log(1+i)}.
\end{aligned}
$$

4.15

定常状態の積立金，掛金，給付をそれぞれ F, C, B とおくと，極限方程式 $dF + C = B$ が成立している．利率が j に下がると，m 年後の積立金 F_m は，漸化式

$$F_m = (F_{m-1} + C - B)(1+j) = F_{m-1}(1+j) - dF(1+j),$$

ただし，

$$F_1 = (F + C - B)(1+j) = F(1+j) - dF(1+j)$$

を満たす.

これから，$m = 1$ から n まで順次代入計算すると，

$$F_n = F(1+j)^n - dF\,\ddot{s}_n^{(j)}.$$

未積立債務の額は,

$$
\begin{aligned}
U &= F - F_n = dF\ddot{s}_n^{(j)} - F((1+j)^n - 1) \\
&= F\ddot{s}_n^{(j)}\left\{\frac{d(1+j)}{j} - 1\right\} = F\frac{i-j}{j(1+i)}\left\{(1+j)^n - 1\right\}.
\end{aligned}
$$

これが，F_k に一致するのは，

$$n = \frac{\log\left\{\dfrac{kj(1+i)}{i-j} + 1\right\}}{\log(1+j)}$$

第 5 章の演習問題

5.1

(1) 翌年度の一人当たり掛金は,

$$\frac{S^p + S^a + S^f - (F+U)}{G^a + G^f}$$

なので，1 年間の掛金総額の差額は,

$$\frac{U}{G^a+G^f}\cdot L = d\cdot U.$$

(2)　翌年度の積立金は

$$\begin{aligned}&(F+U+C+dU-B)(1+i)\\&\quad=(F+C-B)(1+i)-U(1+i)(1-d)\\&\quad=F+U.\end{aligned}$$

その翌年度の積立金も同様に $F+U$.

5.2

(1)　加入年齢方式：

$$\begin{aligned}&{}^{E}P=\frac{S^f}{G^f}=0.08,\\&P_{PSL}=\frac{S^p+S^a-{}^{E}PG^a-F}{15.979LB}=0.01502,\\&{}^{E}P+P_{PSL}=0.09502.\end{aligned}$$

(2)　開放基金方式：

$$\begin{aligned}&{}^{OAN}P=\frac{S^f+{}^{FS}S^a}{G^f+G^a}=0.08182,\\&P_{PSL}=\frac{S^p+S^a+S^f-{}^{OAN}P(G^a+G^f)-F}{15.979LB}=0.01252,\\&{}^{OAN}P+P_{PSL}=0.09434.\end{aligned}$$

(3)　開放型総合保険料方式：${}^{O}P=\dfrac{S^p+S^a+S^f-F}{G^a+G^f}=0.09091$

(4)　閉鎖型総合保険料方式：${}^{C}P=\dfrac{S^p+S^a-F}{G^a}=0.1.$

5.3

(1)　加入年齢方式：

$$\begin{aligned}&{}^{E}P=\frac{S^f}{G^f}=0.12,\\&P_{PSL}=\frac{S^p+S^a-{}^{E}PG^a-F}{15.979LB}=0.06008,\\&{}^{E}P+P_{PSL}=0.18008.\end{aligned}$$

(2)　開放基金方式：

$$
\begin{aligned}
&{}^{OAN}P = \frac{S^f + {}^{FS}S^a}{G^f + G^a} = 0.12273,\\
&P_{PSL} = \frac{S^p + S^a + S^f - {}^{OAN}P(G^a + G^f) - F}{15.979LB} = 0.056324,\\
&{}^{OAN}P + P_{PSL} = 0.17905.
\end{aligned}
$$

(3)　開放型総合保険料方式：$^{O}P = \dfrac{S^p + S^a + S^f - F}{G^a + G^f} = 0.16364.$

(4)　閉鎖型総合保険料方式：$^{C}P = \dfrac{S^p + S^a - F}{G^a} = 0.2.$

5.4

前年度末の積立金，責任準備金，不足金，予定利率を F, V, PL, i とする．積立金は，

$$(F + 2000)1.025 - 2500 = 9800$$

より $F = 10000$．よって，

(1)　運用収益 $= (10000 + 2000)0.025 = 300.$

(2)　当年度発生不足金 $= 12500 + 2500 - 12000 - 2000 - 300 = 700.$

(3)　$PL = 2700 - 700 = 2000$，$V = F + PL = 12000$ であり，

$$\text{責任準備金の推移：}(12000 + 2000)(1 + i) - 2500 + 300 = 12500$$

から，予定利率 $i = 0.05.$

(4)　利差損益 $= 12000(0.025 - 0.05) = -300.$

(5)　前年度不足金に対する予定利息 $= -2000 \times 0.05 = -100.$

5.5

(1)　$l_y \cdot \mu_y \cdot b_y \cdot K_{y-x_e} \cdot e^{-\delta(y-x)}$,　　(2)　$l_y \cdot b_y \cdot e^{-\delta(y-x)}$,

(3)　$l_y b_y \cdot (\mu_y \cdot K_{y-x} - P_{x_e})$,　　(4)　$b_x \cdot e^{-\delta x}$,　　(5)　$l_x \cdot e^{-\delta x}$,

(6)　$l_x \cdot b_x$,　　(7)　$l_x b_x e^{-\delta x}$,　　(8)　$-\mu_x + \lambda_x - \delta$,

(9)　$l_x \cdot b_x \cdot e^{-\delta x}$,　　(10)　$\mu_x K_{x-x_e}$.

5.6

初期債務を U_0，当初の特別掛金を $P_{PSL} = \dfrac{U_0}{\ddot{a}_{\overline{20|}}}$ とする．$A = P_{PSL}$であり，$B = \dfrac{U_0 x}{\ddot{a}_{\overline{10|}}}$ とおく．5 年度末の未積立債務 (初期債務の未償却残高と 5 年度末に発生した後発債務との合計額) を 13 年度で償却する場合の特別保険料が $(A + B)$ となるので，

$$(A+B)\ddot{a}_{\overline{13}|} = A\ddot{a}_{\overline{15}|} + U\cdot x \Longleftrightarrow \left(1+\frac{\ddot{a}_{\overline{20}|}}{\ddot{a}_{\overline{10}|}}x\right)\ddot{a}_{\overline{13}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{15}|}}{\ddot{a}_{\overline{20}|}} + x.$$

これから，

$$x = \frac{\ddot{a}_{\overline{10}|}(\ddot{a}_{\overline{15}|} - \ddot{a}_{\overline{13}|})}{\ddot{a}_{\overline{20}|}(\ddot{a}_{\overline{13}|} - \ddot{a}_{\overline{10}|})} = 0.3518.$$

5.7

(1)　$G^a = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x \sum_{y=x}^{x_r-1} \frac{D_y}{D_x} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_y v^{y-x} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_y \frac{1-v^{y-x_e+1}}{d} = \frac{L}{d} - G^f.$

(2)　利差益などが発生した場合には，(i) 掛金を引き下げる場合と (ii) 留保する場合がある．(i) の 1 人当たり掛金は $\frac{S-F}{G^a+G^f}$，(ii) は $\frac{S-(F-R)}{G^a+G^f}$ なので，年間の総掛金差額は，$\frac{RL}{G^a+G^f}$.

(3)　(1) を利用して，

$$\frac{RL}{G^a+G^f} = \frac{PL}{\frac{L}{d}} = Rd.$$

5.8

ある年度の期始時点の PSL 保険料収入現価を考える．n 年間 P_{PSL} を支払う予定が，初年度に $(1+\alpha)P_{PSL}$，翌年度から $(n-1-t)$ 年間 P_{PSL} を支払うので，

$$P_{PSL}\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+\alpha)P_{PSL} + vP_{PSL}\ddot{a}_{\overline{n-t-1}|}$$

が成り立つ．すなわち，$\alpha = \ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{\overline{n-t}|}$ の関係がある．

5.9

(1)　標準掛金率：$P = 0.01\dfrac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} C_x \sum_{y=x_e}^{x} b_y + D_{x_r}\sum_{y=x_e}^{x_r-1} b_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y b_y} a_{\overline{n}|}^{\cdot\cdot}.$

責任準備金：

$$V = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{L_x B_x}{D_x b_x}\left\{0.01\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \sum_{z=x_e}^{y} b_z \ddot{a}_{\overline{n}|} + 0.01 D_{x_r}\sum_{y=x_e}^{x_r-1} b_y \ddot{a}_{\overline{n}|} - P\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y b_y\right\}.$$

ただし，L_x は x 歳の加入者数，B_x は x 歳の加入者 1 人当たりの給与である．

(2)　昇給時期 (掛金払い込み前) の給与が，B_x から $B_x\times(1+\beta)$ となり，それ以降の給与は給与指数どおりに昇給する．

- 給付現価中の過去期間分の累計 $\sum_{z=x_e}^{x-1} b_z$ にはベースアップの効果はない.
- 後発過去勤務債務： x_e 歳の者は，給付現価および掛金収入現価の双方が $(1+\beta)$ 倍となるため損益はない.

5.10

初期過去勤務債務を 100 とすると，毎年 5 の後発過去勤務債務が期末に発生する. 1 人当たり特別掛金を設定する場合は，制度発足時に特別掛金の計算を行い，後発過去勤務債務の発生による特別掛金の見直しを行わない.

	方法 (1):10 年間元利均等方式			方法 (2):$K, 2K, \cdots, 5K$		
	期始残高	特別掛金	期末残高	期始残高	特別掛金	期末残高
1	100.00	11.15	96.07	100.00	5.17	102.21
2	96.07	11.70	91.48	102.21	10.85	98.64
	方法 (3):8 年間元利金等償却			方法 (4):残高の 15 %定率償却		
	期始残高	特別掛金	期末残高	期始残高	特別掛金	期末残高
1	100.00	13.61	93.55	100.00	15.00	92.13
2	93.55	13.61	86.94	92.13	13.82	85.26

$$\text{期末残高} = (\text{期始残高} - \text{特別掛金}) \times 1.025 + 5(\text{後発債務})$$

となるので，少ない順番は，(4) → (3) → (1) → (2) である.

5.11

開放基金方式を採用している場合であっても，実務上は標準掛金の見直しを毎年行わない場合が多い.

(1)　再計算前の給付現価・給与現価に基づく標準掛金率

$$P_1 = \frac{{}^{FS}S_1^a + S_1^f}{G_1^a + G_1^f} = 0.04\ [40\ ‰].\quad (\text{添字 1 は再計算前})$$

(2)　再計算後の標準掛金率

$$P_2 = \frac{{}^{FS}S_2^a + S_2^f}{G_2^a + G_2^f} = 0.04095\ [41\ ‰].\quad (\text{添字 2 は再計算後})$$

(3)　(1) とは異なり，前再計算時期の給付現価と給与現価に基づいて計算された実際の掛金や責任準備金の計算に適用される標準掛金率．これを P_3 とおくと，

$$\text{責任準備金} = S_1^a + S_1^f + S_1^p - P_1(G^a + G^f)$$
$$= 150 + 100 + 70 - P_3(1500 + 2500)$$

となる．剰余金 5 があるので，責任準備金は $135 - 5 = 130$ である．よって，$P_3 = 0.0475$ [48 ‰].

(4) $PSL = S_1^a + S_1^f + S_1^p - F_1 + R_1$
$$= 160 + 100 + 80 - P_2(1600 + 2600) - 130 = 48.$$

(5) 剰余金を留保するとは，積立金 135 のうち，再計算前の剰余金 5 を特別掛金 (過去勤務債務) の計算には使用しないこと (積立金のうち，剰余金分を積立金とみなさない) である．したがって，130 に対して特別掛金を設定する：

$$10\text{ 年償却特別掛金} = \frac{48}{100 \times 8.971} = 0.05351 \text{ [53 ‰]}.$$

実際掛金は標準掛金 P_2 に特別掛金を加えたものである．

(6) 剰余金 5 を取り崩すので，

$$0.04095 + \frac{48 - 5}{100 \times 8.971} = 0.08888 \text{ [89 ‰]}.$$

5.12

(1) ア．$P_{x_e} = \dfrac{S_2^f}{G_2^f} = \dfrac{110}{2600} = 0.04231$ [42 ‰],

$PSL = S_2^a + S_2^p - P_{x_e} G_2^a - F_2$

$= (160 + 80 - 135) - 0.04231(1600) = 37.31$ [37 億円],

$P_{PSL} = \dfrac{PSL}{100 \times 12.691} = 0.0294$ [29 ‰].

イ．${}^{OAN}P = \dfrac{{}^{FS}S_2^a + S_2^f}{G_2^a + G_2^f} = 0.04095$ [41 ‰],

$PSL = S_2^a + S_2^f + S_2^p - {}^{OAN}P(G_2^a + G_2^f) - F_2 = 43$ [43 億円],

$P_{PSL} = \dfrac{PSL}{100 \times 12.691} = 0.0338$ [34 ‰].

ウ．${}^{C}P = \dfrac{S_2^a + S_2^p - F_2}{G_2^a} = 0.0656$ [66 ‰].

(2) ア．$P_{x_e} = (1.1)0.04231 = 0.04654$ [47 ‰],

$PSL = 46.54$ [47 億円],

$P_{PSL} = \dfrac{PSL}{100 \times 12.691} = 0.03667$ [37 ‰].

イ. $^{OAN}P = (1.1)0.04095 = 0.04504$ [45 ‰],

$PSL = 1.1(S_2^a + S_2^f) + S_2^p - 0.04504(G_2^a + G_2^f) - F_2 = 52.8$ [53 億円],

$$P_{PSL} = \frac{PSL}{100 \times 12.691} = 0.04160 \text{ [42 ‰]}.$$

ウ. $$^{C}P = \frac{1.1S_2^a + S_2^p - F_2}{G_2^a} = 0.0756 \text{ [76 ‰]}.$$

(3) 定常人口の仮定より，責任準備金は 1 年経っても変化しない．1 年間の支払額は掛金が期末払いなので

$$i(S^a + S^f + S^p) = 8.75,$$

1 年間の総給与は

$$d(G^a + G^f) = 102.44$$

なので，期末積立金は

$$(\text{期始積立金} + \text{総給与} \times (\text{標準 } P + \text{特別 } P)) \times 0.9 - \text{支払額}$$
$$= (135 + 102.44 \times (0.042 + 0.029)) \times 0.9 - 0.875 = 119.30\text{[119 億円]}$$

であり，責任準備金は

$$V = 1.1S^a + S^p - 0.045G^a = 181.54 \text{ [182 億円]}$$

となる．これから PSL は

$$\text{責任準備金} - \text{積立金} = 62.24$$

となり，

$$P_{PSL} = \frac{62.24}{100 \times 12.691} = 0.04787 \text{ [48 ‰]}.$$

よって，標準掛金率 = 47 ‰ (5.12(2) より)，特別掛金率 = 48 ‰ となる．

5.13

元々の与えた数値では，適当な解答が得られないため，B 社の数値を以下のとおりに改め，$F = 40, {}^{PS}S^a = 25, S^a = 60, S^p = 30$ とする (正誤表にも記載).

(1) $$P_B = \frac{S_B^f}{G_B^f} = 0.02667 \text{ [27 ‰]},$$

(2) $$P_{PSL} = \frac{S_B^a + S_B^p - PG_B^a - F_B}{50 \times 15.979} = 0.08595 \text{ [86 ‰]}.$$

(3)　合併は A 社の制度に統合されるので，標準掛金率は A 社のそれが適用されるので，問題 5.21(1) より 0.04231 となる．B 社の年金給付を A 社に合わせるためには現行給付を 1.587 倍 (0.04231÷0.02667) する必要がある．したがって，責任準備金の総額は,

$$\begin{aligned} V_{A+B} &= (S_A^a + S_A^p) + (S_B^a + S_B^p) - 0.04231(G_A^a + G_B^a) \\ &= 234.15 \text{ [234 億円]} \end{aligned}$$

(4)　$PSL_{A+B} = V_{A+B} - F_A - F_B = 59.15$ なので,

$$P_{PSL,\ A+B} = \frac{V_{A+B} - F_A - F_B}{150 \times 8.971} = 0.04396 \text{ [44 ‰]}.$$

(5)　A 社の従前の特別掛金率 0.0294 となるようにすればよい．よって,

$$\frac{PSL}{0.0294LB} = \frac{59.81}{150 \times 0.0294} = 13.41,$$

本書 165 ページの表から，最短年数は 17 年.

5.14

制度 1 の標準掛金と責任準備金をまず求める：

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{S_1^f}{G_1^f} = 0.04 \text{ [40 ‰]}, \\ V_1 &= S_1^a + S_1^p + S_2^p - P_1 G_1^a = 230 \text{ [230 億円]}. \end{aligned}$$

次に加入者の過去分給付現価をそれぞれ求めると，制度 1 は 80，制度 2 は 60 である．したがって，制度 2 の受給者責任準備金分控除後の積立金 60 (230 − 140 − 30) をこの比率で按分すると制度 1 は $F_1' = 204.29$，制度 2 は $F_2' = 25.71$ となる．

これから，制度 1 の特別掛金率は,

$$\frac{230 - 204.29}{90 \times 15.979} = 0.01788 \text{ [18 ‰]}.$$

また制度 2 の掛金は,

$$\frac{S_2^a + S_2^f - F_2'}{G_2^a + G_2^f} = 0.07013 \text{ [70 ‰]}.$$

5.15

予定利率 i と実際の利回り j の連立方程式を解く．標準掛金を x とすると,

$$\begin{cases}(3000+x+100-200)j=120,\\(3000+x+100-200)(j-i)=45,\\(3860+x-200)(1+i)+46=3900.\end{cases}$$

これから，$i=0.025$，$j=0.04$，$x=100$．あとは簡単に出る．

(1)　860 ($=3860-3000$),　(2)　3120,　(3)　780,

(4)　80 ($=860-780$),　(5)　100,　(6)　4180,

(7)　21.5 ($=0.025\times 860$),　(8)　2.5 ($=0.025\times 100$).

第 6 章の演習問題

6.1

以下の表を作成することにより PBO が求められる．給付算定式による PBO は 298762 円．期間定額基準による PBO は 368686 円.

給付の割り当て	給付算定式		期間定額基準	
退職時の x,t	59, 2	60, 3	59, 2	60, 3
$\dfrac{\Delta f(t)}{f(t+\tau+1)}$	$\dfrac{1.0}{3.0}$	$\dfrac{1.0}{3.5}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$
$\alpha_{t+\tau+1}$	3.0	3.5	3.0	3.5
$B_{x+\tau+1}$	308000	310000	308000	310000
$K_{x+\tau+1}$	1	1	1	1
$\dfrac{C_{x+t}}{D_x}$	$1.02^{-1}\times 20\%$ $=0.196078$	$1.02^{-2}\times 80\%$ $=0.768935$	$1.02^{-1}\times 20\%$ $=0.196078$	$1.02^{-2}\times 80\%$ $=0.768935$
事象毎の PBO	60392	238370	90588	278098
PBO	298762		368686	

6.2

以下の表を作成することにより，$NPPC$ は 368545 円, 1 年後の PBO の予測値は 572993 円となる．

給付の割り当て	期間定額基準	
退職時の x, t	59, 2	60, 3
(1) $\dfrac{\Delta f(t)}{f(t+\tau+1)}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$
(2) $\alpha_{t+\tau+1}$	3.0	3.5
(3) $B_{x+\tau+1}$	308000	310000
(4) $K_{x+\tau+1}$	1	1
(5) $\dfrac{C_{x+t}}{D_x}(1+i)$	$1.02^{-1} \times 20\% \times 1.02$ $= 0.2$	$1.02^{-2} \times 80\% \times 1.02$ $= 0.784314$
(6) 事象毎の SC $(= (1) \times (2) \times (3)$ $\times (4) \times (5))$	92400	283660
(7) SC	376060	
(8) 期始の PBO	374248	
(9) $IC(= (8) \times 2\%)$	7485	
(10) F	300000	
(11) $ER(= (10) \times 5\%)$	15000	
(12) $NPPC$ $(= (7) + (9) - (11))$	368545	
(13) B $(= \alpha_2 \cdot B_{59} \cdot K_{59} \cdot 20\%)$	184800	
(14) 1 年後の PBO の予測値 $(= (7) + (8) + (9) - (13))$	572993	

6.3

1 年後の年金資産の予測値は，次のとおりである：

$$300000 \times 1.05 - 184800\ (= \text{前問 (13)}) + 400000 = 530200.$$

期始の U は，

$$374248 - 300000 = 74248.$$

ここで，

$$NPPC - C = 368545 - 400000 = -31455.$$

したがって，

$$1\ \text{年後の}\ U\ \text{の予測値} = 74248 - 31455 = 42793.$$

これは，1 年後の PBO の予測値から F の予測値を差引いた値 $(572993 - 530200)$ と等しい．1 年後の実際の PBO は，従業員が残存しているため以下のとおりとなる：

$$\begin{aligned}\frac{f(2)}{f(3)}\alpha_3 B_{60} K_{60} \frac{C_{59}}{D_{59}} &= \frac{2}{3} \times 3.5 \times 310000 \times 1 \times 1.02^{-1} \times 100\% \\ &= 709150.\end{aligned}$$

一方，1 年後の実際の F は，給付が発生しなかったため，

$$300000 \times 1.02 + 400000 = 706000$$

となる．したがって実際の U の値は，

$$709150 - 706000 = 3150$$

である．数理損益は，U の予測値と実際の値との差であるから，

$$\frac{G}{L} = (-3150) - (-42793) = 39643.$$

この数理損益は，資産の収益に関する差損 $(= 300000 \times (2\% - 5\%) = -9000)$ と債務側の差益 $(= 39643 - (-9000) = 48643)$ に分けることができる．債務側の差益は，予定給付額を支払わずに済んだことによる差益 $(= 184800)$ と残存したことに伴なう PBO の増加額 $(572993 - 709150 = -136157)$ とに分解できる．

6.4

従業員の ABO は,

$$ABO = \frac{f(2)}{f(3)}\alpha_3 B_{58} K_{60} v \times 20\% + \frac{f(1)}{f(3)}\alpha_3 B_{58} K_{60} v^2 \times 80\%.$$

したがって, $\dfrac{\partial v^k}{\partial i} = -kv^{k+1}$ を使って,デュレーションは以下のとおりとなる:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1+i}{ABO}\frac{\partial ABO}{\partial i} \\ &= \frac{1}{ABO}\left\{\frac{f(2)}{f(3)}\alpha_3 B_{58} K_{60} v \times 20\% + 2\frac{f(1)}{f(3)}\alpha_3 B_{58} K_{60} v^2 \times 80\%\right\}. \end{aligned}$$

$i = 2\%$ として数値を当てはめると,以下のとおり給付算定式の場合 1.8 年,期間定額基準の場合 1.75 年となる.

給付の割り当て	給付算定式		期間定額基準	
退職時の x, t	59, 2	60, 3	59, 2	60, 3
$\dfrac{\Delta f(t)}{f(t+\tau+1)}$	$\dfrac{1.0}{3.0}$	$\dfrac{1.0}{3.5}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$
$\alpha_{t+\tau+1}$	3.0	3.5	3.0	3.5
B_x	305000	305000	305000	305000
$K_{x+\tau+1}$	1	1	1	1
$\dfrac{C_{x+t}}{D_x}$	$1.02^{-1} \times 20\%$ $= 0.190678$	$1.02^{-2} \times 80\%$ $= 0.768935$	$1.02^{-1} \times 20\%$ $= 0.190678$	$1.02^{-2} \times 80\%$ $= 0.768935$
事象毎の ABO	59804	234525	89706	273613
ABO, D の式の分子	294829	528854	363319	636913
D	1.8		1.75	

6.5

年金積立基準と会計基準の主な差異をあげると，年金積立基準の年金負債は主として平準積立方式に属する方式で算定されるが，会計基準は PBO であること，割引率の設定基準が異なること，特別掛金の償却ルールが異なることなど多岐にわたるため，その結果である年金負債の金額は大きく異なることが普通である．このため，その情報の利用者である年金制度運営者，企業経営者，さらには投資家にとって年金の財政状態の真の姿の理解を妨げるという弊害や混乱をもたらすことが一番大きな問題である．

企業財務の観点では，会計情報が重視されるため運用損益の変動によって長期的な年金運営に大きな影響を及ぼし，これが単独・連合の厚生年金基金の代行返上ブームの一因となった．実際の掛金は年金積立基準により拠出されるため，一般には会計上の費用と乖離があり，多額の前払い・未払い年金費用が生ずる可能性があることも問題点の一つである．

財務担当者はこの調整のための余分な作業が必要となる．これらの問題の解消または軽減のためには，二つの基準の統一，それができなくとも調和が必要であるが，年金積立基準がソルベンシー目的であり，会計基準が予算目的 (第 8 章参照) であることから容易ではない．基本的な枠組みを共通化することにより，両者の乖離の理由を利用者に分かりやすくすることが 1 つの解決の方向であろう．