

Blanchard and Khan (1980, “The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations,” *Econometrica*, Vol.48, pp. 1305-1311)による DSGE 解法について
第3章執筆者 溜川健一

以下で表現できる線形の差分方程式体系があったとします。一般的に、非線形 DSGE モデルを線形化しますと、以下のような形になります。

$$AE_t \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + C \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\varepsilon_t = D \varepsilon_{t-1} + e_t$$

ここで、 x_t は m 次元の状態変数ベクトル、 y_t は n 次元はジャンプ内生変数ベクトル、 ε_t は l 次元の外生変数ベクトルです。また、 e は l 次元の外生的な確率ショックベクトルです。

固有値法により誘導形を求めるため、係数行列 A が逆可能であることを仮定します。(1) は以下のように書き換えられます。

$$E_t \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = B^* \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + C^* \varepsilon_t \quad (1')$$

ここで、 $B^* = A^{-1}B$ $C^* = A^{-1}C$ 、です。ジョルダン分解を用いると、 $B^* = P^{-1}\Lambda P$ のように、 B^* を、対角要素に固有値を持ちそれ以外はゼロの要素を持つ行列 Λ とその固有ベクトルを列に持つ行列 P で表現できます。なお、 Λ の対角要素は昇順に並んでいるものとする。これを使うと、

$$PE_t \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \Lambda P \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + PC^* \varepsilon_t$$

とかけます。このとき、絶対値で1を超える固有値の数を $\#u$ として、以下のベクトルを定義します。

$$\begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

ここで、 u_t は次元が $\#u$ のベクトルとする。また、以下での説明の便宜のため、 P を以下のように分割しておきます。

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

このとき、

$$E_t \begin{bmatrix} s_{t+1} \\ u_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} C^* \varepsilon_t \quad (3)$$

ここで、 Λ_1 は対角要素に絶対値で1を下回る要素を持つ対角行列です。 Λ_2 対角要素に絶対値で1を上回る要素を持つ対角行列である。(3)から、

$$E_t[s_{t+1}] = \Lambda_1 s_t + P_1 C^* \varepsilon_t \quad (4)$$

$$E_t[u_{t+1}] = \Lambda_2 u_t + P_2 C^* \varepsilon_t \quad (5)$$

となります。(5)式は Λ_2 の対角要素が絶対値で1を超えているため、forward 方向に解くことで解が得られます。したがって、

$$\begin{aligned} u_t &= \Lambda_2^{-1} E_t[u_{t+1}] - \Lambda_2^{-1} P_2 C^* \varepsilon_t \\ &= - \sum_{i=0}^{\infty} (\Lambda_2^{-1})^{i+1} P_2 C^* E_t[\varepsilon_{t+i}] \\ &= -W \varepsilon_t \end{aligned}$$

ここで、 W は以下を満たす行列です。

$$W = \Lambda_2^{-1} P_2 C^* + \Lambda_2^{-2} P_2 C^* D + \Lambda_2^{-3} P_2 C^* D^2 \dots$$

なお、以下が成り立ちます。

$$W - \Lambda_2^{-1} W D = \Lambda_2^{-1} P_2 C^*$$

また、この表現については、下記が成立します。

$$\text{vec}(W) = (I - D' \otimes \Lambda_2^{-1})^{-1} \text{vec}(\Lambda_2^{-1} P_2 C^*)$$

ここで、 vec オペレーターは、引数となる行列の列ベクトルについて、1列目の下に2列目を付け加えるような形で1列のベクトルにまとめるものです。このとき、

$$P_{21} x_t + P_{22} y_t = -W \varepsilon_t \quad (6)$$

が得られますが、 x_t, ε_t を所与として(6)を用いて y_t を求めることができるかどうかは、 $\#u$ と n の大小関係に依存してきます。以下で場合分けをして説明します。

I. $\#u = n$

この場合、 P_{22} は正方行列となり、

$$y_t = -P_{22}^{-1} P_{21} x_t - P_{22}^{-1} W \varepsilon_t \quad (7)$$

したがって、 x_t, ε_t を所与として y_t が一意に決まることになります。

他方、 x_{t+1} は先決内生変数であるため $E_t(x_{t+1}) = x_{t+1}$ であることと、(3)から、

$$P_{11} x_{t+1} + P_{12} E_t(y_{t+1}) = \Lambda_1 (P_{11} x_t + P_{12} y_t) + P_1 C^* \varepsilon_t$$

これに(7)を代入すると、

$$(P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{21}) x_{t+1} = \Lambda_1 (P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{21}) x_t + (\Lambda_1 P_{12} P_{22}^{-1} W - P_{12} P_{22}^{-1} W D + P_1 C^*) \varepsilon_t$$

したがって、 $P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{21}$ が逆可能であれば、

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{21})^{-1} \Lambda_1 (P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{21}) x_t \\ &\quad - (P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{21})^{-1} (\Lambda_1 P_{12} P_{22}^{-1} W - P_{12} P_{22}^{-1} W D - P_1 C^*) \varepsilon_t \end{aligned} \quad (8)$$

となり、 x_t, ε_t から x_{t+1} が一意に決まることになります。

II. $\#u < n$

この場合、 $\#u \times n$ の P_{22} は列の数が多い行列となり、 x_t, ε_t を所与として、 y_t の表現は無限に存在することになります(indeterminacy と呼ばれる状況です)。

III. $\#u > n$

この場合、 $\#u \times n$ の P_{22} は行の数が多い行列となり、 x_t, ε_t を所与として、 y_t の表現は一般には存在しません。