と考え、(9-10) 式を適用すると、

$$2=\frac{2c_1+\frac{c_2}{2}+\frac{c_2}{2}}{3}\geqq\left(\frac{c_1c_2^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{9-13}$$

すなわち

$$2\geqq\frac{w}{2^{\frac{1}{3}}}$$

が求まります。等号は $x=y=z$ すなわち $\underline{2c_1=\frac{c_2}{2}}=2$ のときに成り立ちます。よって、$\underline{c_1=1}$, $\underline{c_2=4}$ です。w の最大値については

$$w=2\cdot2^{\frac{1}{3}}=2^{1+\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}} \tag{9-14}$$

と計算します。

練習問題

1．次の関数の定義域を求めよ。

(1) $y=\sqrt{2x+4}$　　(2) $y=-\sqrt{4-3x}$

2．次の関数の値域を求めよ。

(1) $y=3+\sqrt{2x+4}$　　(2) $y=-2-\sqrt{4-3x}$

3．効用 $u=\sqrt{c_1c_2}$ を予算制約式 $3c_1+2c_2=6$ の下で最大化せよ。

4．効用 $u=\sqrt{c_1c_2}$ を予算制約式 $p_1c_1+p_2c_2=I$ の下で最大化せよ。

5．効用 $u=c_1^{\frac{1}{5}}c_2^{\frac{2}{5}}$ を予算制約式 $p_1c_1+p_2c_2=I$ の下で最大化せよ。

[解答]

1．

(1) $2x+4\geqq 0$ なので、$x\geqq -2$

(2) $4-3x\geqq 0$ なので、$\frac{4}{3}\geqq x$

2．

(1) $y-3=\sqrt{2x+4}\geqq 0$ より、$y\geqq 3$

(2) $y+2=-\sqrt{4-3x}\leqq 0$ より、$y\leqq -2$

3．

(9–7) 式より、$6=3c_1+2c_2\geqq 2\sqrt{6c_1c_2}=2\sqrt{6}\,u$, $6/(2\sqrt{6})\geqq u$ である。

$\frac{6}{2\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ から、$\frac{\sqrt{6}}{2}$ が u の最大値である。

この最大値は、

$$3c_1=2c_2=\frac{6}{2} \qquad \therefore c_1=1,\ c_2=\frac{3}{2}$$

で達成される。

4．

$I=p_1c_1+p_2c_2\geqq 2\sqrt{p_1p_2c_1c_2}=2\sqrt{p_1p_2}\,u$ である。$p_1c_1=p_2c_2$ のとき、$u=\frac{I}{2\sqrt{p_1p_2}}$ が最大値。よって、$c_1=\frac{I}{2p_1}$, $c_2=\frac{I}{2p_2}$ のとき、u の最大値は $\frac{I\sqrt{p_1p_2}}{2p_1p_2}$

5．効用関数を5乗した $c_1c_2^2=u^5$ を最大化する。

$$I=p_1c_1+\frac{p_2c_2}{2}+\frac{p_2c_2}{2}\geqq 3\left(\frac{p_1p_2^2c_1c_2^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

これは、$p_1c_1=\frac{p_2c_2}{2}=\frac{I}{3}$ で最大化され、u の最大値は $I^3=\frac{3^3p_1p_2^2u^5}{4}$ をみたす。よって、$u^5=\frac{4I^3}{(27p_1p_2^2)}$。

$$u=\left\{\frac{4I^3}{27p_1p_2^2}\right\}^{\frac{1}{5}}。$$