$$du = \lambda(p_1 dx_1 + p_2 dx_2) \qquad (23\text{-}9)$$

となります。価格を一定とすると、I の全微分が、

$$dI = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \qquad (23\text{-}10)$$

となり、(23-10) 式を (23-9) 式の右辺に代入すると、

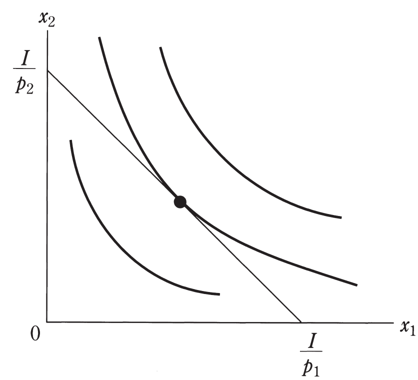
$$\frac{du}{dI} = \lambda \qquad (23\text{-}11)$$

が得られます。これは、所得が 1 単位増加するときの効用の追加的増加なので、**所得の限界効用**とよばれます。

(x_1, x_2) 平面上で、制約条件をみたす点の集合を求めます（**図23-1**）。そのうえで、最大化関数 $v(x_1, x_2)$ の等高線を (x_1, x_2) 平面に描きます。$v = x_1^2 x_2^2$ が最大化する関数であるとすると、その等高線は、原点に近いほど、より低い u の値に対応し、逆に、右上方向に位置するほど、高い u の値に対応します。したがって、制約条件をみたしつつ、u の最も右上方向に位置する等高線上の点を求めるなら、それが予算制約下での効用最大化問題の解となります。

すると、最大化する関数の等高線が重要となります。たとえば、$u = x_1 x_2$、$v = x_1^2 x_2^2$、$w = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}$ は、すべて同じ形状の等高線の解をもちます。なぜなら、1

図23 - 1



4．$x_1>0$, $x_2>0$ とする。$x_1^{\frac{2}{5}}x_2^{\frac{3}{5}}=2$ のもとで、x_1+x_2 の最小値を求めよ。

［解答］

1．ラグランジュ関数 $L=x_1x_2+3x_1+\lambda(6-x_1-x_2)$ をつくり、x_1 と x_2 について偏微分すると、

$$x_2+3-\lambda=0,\ x_1-\lambda=0$$

これから、$x_1=x_2+3$。これを $6-x_1-x_2=0$ に代入して、$x_2=\frac{3}{2}$, $x_1=\frac{9}{2}$

2．$u=x_1^{\frac{2}{5}}x_2^{\frac{3}{5}}$ を最大化する代わりに、$u^5=x_1^2x_2^3$ を最大化する方が簡単である。そこで、ラグランジュ関数

$$L=x_1^2x_2^3+\lambda(1-x_1-x_2)$$

を x_1 と x_2 で偏微分して、

$$2x_1x_2^3-\lambda=0,\ 3x_1^2x_2^2-\lambda=0$$

よって、$\underline{2x_2}=3x_1$。これを $1=x_1+x_2$ に代入して、$x_1=\frac{2}{5}$。よって、$x_2=\frac{3}{5}$。

u^5 の最大値は、$\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{2^2\times3^3}{5^5}$。よって、$u$ の最大値は、$u=\frac{2^{\frac{2}{5}}\times3^{\frac{3}{5}}}{5}$

3．$L=x_1^2+x_2^2+\lambda(5-x_1-2x_2)$ を x_1 と x_2 で偏微分して、

$$2x_1-\lambda=0,\ 2x_2-2\lambda=0$$

これから、$x_2=2x_1$ を得て、$5=x_1+2x_2$ に代入して、$x_1=1$。よって、$x_2=2$。最小値は、$u=1+4=5$

4．$x_1^{\frac{2}{5}}x_2^{\frac{3}{5}}=2$ の制約式を $x_1^2x_2^3=2^5=32$ と考えたほうが、微分が簡単である。そこで、

$$L=x_1+x_2+\lambda(32-x_1^2x_2^3)$$

を考える。これから、

$$1-2\lambda x_1x_2^3=0,\ 1-3\lambda x_1^2x_2^2=0$$

よって、$2x_2=3x_1$。これと $x_1^2x_2^3=32$ から、

$$x_1^2\left(\frac{3}{2}x_1\right)^3=32。よって、x_1^5=\frac{2^8}{3^3}。$$

これから、$x_1=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$, $x_2=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$。

x_1+x_2 の最小値は、$(2+3)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}}=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$