## 第22話 解説

＊第22話で用いられる重要な式

$$dy = f'(x)dx$$

$f(x_1, x_2)$の$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$における全微分：

$$dy = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)dx_1 + f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)dx_2$$

1変数関数$y=f(x)$の場合、導関数$y'=\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$で、各点$(x, f(x))$での接線の傾きを表します。$x$が他の変数$z$の関数である場合には、合成関数$y=f(x(z))$の微分を用いて、$\dfrac{dy}{dz}=f'(x)\dfrac{dx}{dz}$が成り立ちます。この$dz$を省略して、$dy=f'(x)dx$と書くこともあります。

一方、$y=f(x)$の点$(\bar{x}, f(\bar{x}))$での接線の方程式が$y-f(\bar{x})=f'(\bar{x})(x-\bar{x})$です。$\Delta x=x-\bar{x}$, $\Delta y=y-f(\bar{x})$とおくと、$\Delta y=f'(\bar{x})\Delta x$が接線の方程式です。

ここでは、微分$\dfrac{dy}{dx}$の$dy$と$dx$の別な使い方、それも$\dfrac{dy}{dx}=k$のとき、$dy=kdx$と左右に分けて使うことを説明します。

### ●全微分

2変数関数$y=f(x_1, x_2)$ではどうかというと、$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$から$(\bar{x}_1+\Delta x_1, \bar{x}_2+\Delta x_2)$に移動すると、$y$の変化分は、$\Delta y=f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2)-f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$です。右辺に$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2+\Delta x_2)$を引いて、足すことで、$\Delta y$は

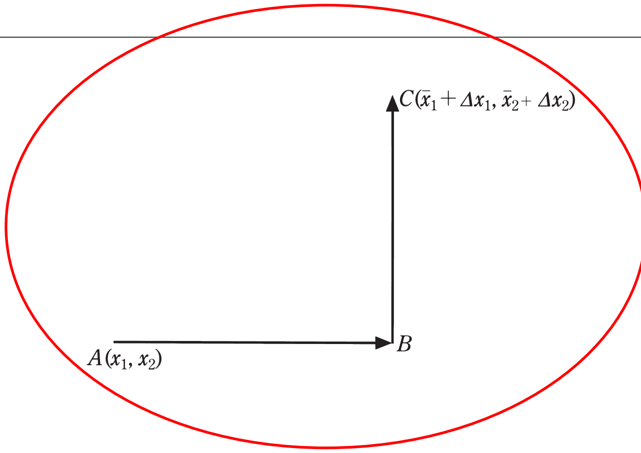
$$\Delta y=f(\bar{x}_1+\Delta x_1, \bar{x}_2+\Delta x_2)-f(\bar{x}_1, \bar{x}_2+\Delta x_2)+f(\bar{x}_1, \bar{x}_2+\Delta x_2)-f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

となります。

いま、$y=f(x_1, x_2)$が図22-1の$A$から$C$へ変化したときに、$y$がどう変化するかを求めることにします。その際、いきなり$AC$を求めるのではなく、$(x_1, x_2)$が$A$から$B$へ変化したときの$y$の変化と$B$から$C$へ変化したときの$y$の変化に分けて、その和として求めることにします。

$(x_1, x_2)$が$A$から$B$へ変化するときには$x_1$のみが変化します。$x_1$の変化分が$dx_1$で、$x_1$が1単位変化するときの$y$の変化を偏導関数$f_1$とすると$y$の変化は$f_1dx_1$で

図22－1




す。$(x_1, x_2)$が$B$から$C$へ変化するときには、$x_2$のみが変化します。$x_2$の変化分が$dx_2$で、$x_2$が１単位変化するときの$y$の変化が$f_2$、$y$の変化は$f_2dx_2$です。結局、すべての変数$(x_1, x_2)$が変化したときの$y$の変化は

$$dy=f_1(x_1, x_2)dx_1+f_2(x_1, x_2)dx_2$$

によって表されます。これが**全微分**とよばれるものです。このことをもう少していねいに説明してみましょう。

ここで、$x_1$と$x_2$が$z$の関数であるケースを考えます。すると、$y=f(x_1(z), x_2(z))$となるので、$y$も$z$の関数となります。

$$\frac{\Delta y}{\Delta z}=\frac{[f(\bar{x}_1+\Delta x_1, \bar{x}_2+\Delta x_2)-f(\bar{x}_1, \bar{x}_2+\Delta x_2)]}{\Delta x_1}\cdot\frac{\Delta x_1}{\Delta z}+\frac{[f(\bar{x}_1, \bar{x}_2+\Delta x_2)-f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)]}{\Delta x_2}\cdot\frac{\Delta x_2}{\Delta z} \quad (22\text{-}1)$$

ここで$\Delta z\to 0$とした極限をとると、$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta y$がすべて０に近づき、

$$\frac{dy}{dz}=f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\frac{dx_1}{dz}+f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\frac{dx_2}{dz}$$

が成り立ちます。$dz$を省略して、

$$dy=f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)dx_1+f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)dx_2$$

と書き、これを**全微分**とよぶのです。

全微分は、接平面の方程式と対応しています。(22-1) 式から

$$\Delta y=f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_1+f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_2 \quad (22\text{-}2)$$

とおくと、これが**接平面方程式**です。(22-2) 式で$x_2$を固定すると、$\Delta x_2=0$とな

り、$x_1$のみが変化すると、接平面上の直線となり、その傾きは、偏微分$f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$です。同様に、$x_1$を固定して、$\varDelta x_1=0$としたときの直線の傾きは、$f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$です。

全微分とは、すべての独立変数$(x_1, x_2)$が変化したときの従属変数$y$に与える効果を表すものです。$x_1$のみが変化すると、$x_1$の１単位当たりの変化に対して、$y$は$f_1$だけ変化します。これが$x_1$に関する偏微分です。$x_1$が$\varDelta x_1$単位変化するなら、$y$の変化は$f_1\varDelta x_1$です。一方、$x_2$のみが$\varDelta x_2$単位変化するなら、$y$の変化は$f_2\varDelta x_2$です。結局、$x_1$が$\varDelta x_1$単位、$x_2$が$\varDelta x_2$単位変化すると、$y$の変化は（22-1）式で与えられることになります。

## ●限界代替率

効用関数が、２財の消費量$x_1$と$x_2$の関数$u=f(x_1, x_2)$であるときに、一定の効用$\bar{u}$を生む生産$x_1$と$x_2$の組み合わせ、すなわち$\bar{u}=f(x_1, x_2)$をみたす$(x_1, x_2)$の集合が効用$\bar{u}$を生む**無差別曲線**です。

**図22-2**の曲面は、効用関数$u=f(x_1, x_2)$のグラフです。効用の値を一定値$\bar{u}$として、曲面を水平な平面で切ります。切り口を上から見ると、$(x_1, x_2)$平面上に等高線が見えます。これが**無差別曲線**です。

無差別曲線上では、$\bar{u}=f(x_1, x_2)$を$x_2$について解くと、$x_2$は$x_1$の関数になります。これを$x_2=g(x_1)$と書きます（**図22-3**）。

$u=f(x_1, x_2)$を全微分すると、

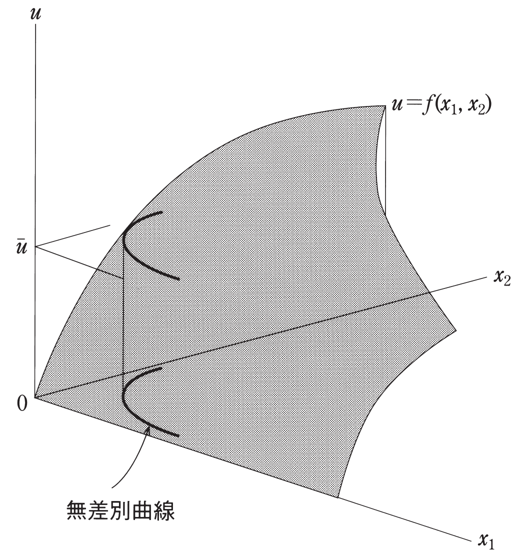
$$du=f_1dx_1+f_2dx_2$$

です。効用$u$を一定とすると、$x_2$は$x_1$の関数となり、両辺を$dx_2$で割ると、$u$が変化しないので、

$$0=\frac{du}{dx_2}=f_1\frac{dx_1}{dx_2}+f_2$$

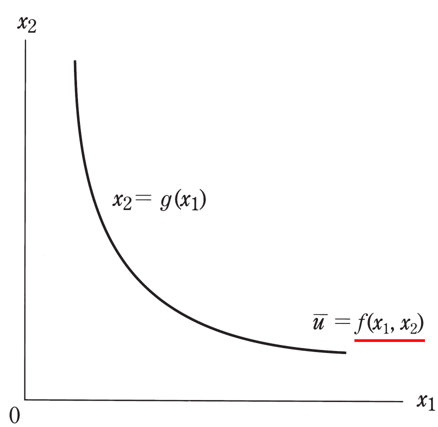
となります。ここで、$-\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{f_2}{f_1}$を**限界代替率**とよびます。これは無差別曲線の傾き$\frac{dx_2}{dx_1}=g'(x_1)$にマイナスをつけたものです。限界代替率とは、第１財を１単位減らした（増やした）場合に、効用が変わらないために必要な第２財の増加量

図22－2




（減少量）です。無差別曲線の傾きは、通常は負なので、マイナスをつけることによって、$-\dfrac{dx_2}{dx_1}$を正にすることができるのです。

図22－3



【例22-1】

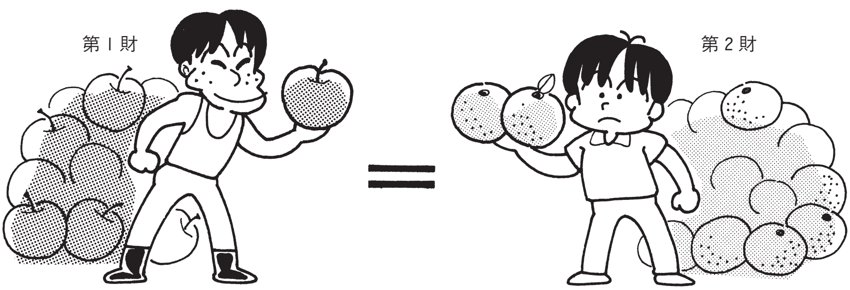
効用関数$u=x_1x_2$の限界代替率を求めます。$u=x_1x_2$を全微分すると、

$$du=x_2dx_1+x_1dx_2$$

となります。$du=0$として、$-\dfrac{dx_2}{dx_1}$を求めます。そして、

$$-\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{x_2}{x_1}$$

が限界代替率です。




限界代替率：第１財を１単位減らした（増やした）場合に
効用が変わらないために必要な第２財の増加量（減少量）

## ●条件付最大化

全微分がいかに便利であるかを知るために、所得（＝予算）制約$p_1x_1+p_2x_2=I$の下で効用$u=x_1x_2$を最大化する問題を考えてみます。価格$p_1, p_2$を一定とすると、$I=p_1x_1+p_2x_2$の全微分は、

$$dI=p_1dx_1+p_2dx_2 \qquad (22\text{-}3)$$

となります（$dx_1, dx_2$の係数がそれぞれ$p_1, p_2$であるのは、$\dfrac{\partial(p_1x_1+p_2x_2)}{\partial x_1}=p_1$, $\dfrac{\partial(p_1x_1+p_2x_2)}{\partial x_2}=p_2$であることによる）。

一方、効用の変化量$du$は、$\dfrac{\partial x_1x_2}{\partial x_1}=x_2$, $\dfrac{\partial x_1x_2}{\partial x_2}=x_1$から

$$du=x_2dx_1+x_1dx_2 \qquad (22\text{-}4)$$

となります。所得$I$を一定とすると、$dI=0$なので、(22-3) 式から、$dx_2=-\frac{p_1}{p_2}dx_1$が得られます。これを (22-4) 式に代入して、両辺を$dx_1$で割ると、

$$\frac{du}{dx_1}=x_2-\frac{p_1x_1}{p_2} \tag{22-5}$$

となります。この (22-5) 式が 0 となる点で$u$は最大化されるので、(22-5) 式から、

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{p_1}{p_2} \tag{22-6}$$

が成り立ちます。

以上の方法は、正しそうだけれど狐につままれた気持ちになるかもしれません。実は、これは以下の方法と同じものです。予算制約式を$x_2$について解いた$x_2=\frac{I-p_1x_1}{p_2}$を$u$に代入すると、効用は$x_1$の関数

$$u=x_1\cdot\frac{I-p_1x_1}{p_2}$$

となります。これを$x_1$について微分すると、第19話の積の導関数の公式$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$から、

$$\frac{du}{dx_1}=\frac{I-p_1x_1}{p_2}+x_1\cdot\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) \tag{22-7}$$

となります。(22-7) 式の第 1 項を$x_2$に置き換えると (22-5) 式になります。全微分を使うと、以下の例22-2のように制約条件を$x_2$について解くと複雑になる場合でも、簡単に最大化の 1 階条件を求めることができます。

**【例22-2】**

所得 (＝予算) $I$が一定で、$x_1$と$x_2$が正の変数のとき、$2x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2=I$の制約の下で、効用$u=x_1x_2$の最大値を与える$x_1$と$x_2$を求めます。$u$の全微分は (22-4) 式で与えられます。制約条件を全微分すると、

$$4x_1dx_1+x_2dx_2=dI$$

[解答]

1.

右辺を$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3)$とおくと、$\boldsymbol{f}_1=3x_1^2+2x_2x_3$, $\boldsymbol{f}_2=2x_1x_3$, $\boldsymbol{f}_3=2x_1x_2+2x_3$なので、$dy=(3x_1^2+2x_2x_3)dx_1+2x_1x_3dx_2+(2x_1x_2+2x_3)dx_3$

2.

$\boldsymbol{f}(x_1, x_2)=x_2x_1^{-1}$とおくと、$\boldsymbol{f}_1=-x_2x_1^{-2}$, $\boldsymbol{f}_2=x_1^{-1}$である。

$$dy=-\frac{x_2}{x_1^2}dx_1+\frac{1}{x_1}dx_2$$

3.

(1)　$u_1=2x_1x_2^3$, $u_2=3x_1^2x_2^2$なので、$du=2x_1x_2^3dx_1+3x_1^2x_2^2dx_2$

(2)　$du=0$とおくと、$\underline{-\dfrac{dx_2}{dx_1}=\dfrac{2x_1x_2^3}{3x_1^2x_2^2}=\dfrac{2x_2}{3x_1}}$

(3)　$x_1+2x_2=1$を全微分して、右辺を0とおくと、$dx_1+2dx_2=0$, $dx_1=-2dx_2$を(1)の$du$の右辺に代入して、

$$du=-x_1x_2^2(4x_2-3x_1)dx_2$$

よって、$x_2=\dfrac{3x_1}{4}$のとき、$\dfrac{du}{dx_2}=0$となり、効用は最大化される。$x_1+2x_2=1$に$x_2=\dfrac{3x_1}{4}$を代入して、$x_1=\dfrac{2}{5}$。よって$x_2=\dfrac{3}{10}$