●高階偏導関数

関数$y=f(x_1, x_2)$の偏導関数$f_1(x_1, x_2)$は**1階の偏導関数**とよばれます。これもx_1とx_2の関数です。f_1とf_2をさらに偏微分することができます。f_1をx_1で偏微分した結果である$\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)=\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}$は、$f_{11}(x_1, x_2)$あるいは$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$と書きます。$f_1$を$x_2$で偏微分した結果である$\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)$は、$f_{12}(x_1, x_2)$あるいは$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$と書きます。同様に、$f_2$を$x_1$で偏微分した結果である$\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)$は、$f_{21}(x_1, x_2)$あるいは$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$、$f_2$を$x_2$で偏微分した結果である$\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)$は、$f_{22}(x_1, x_2)$あるいは$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$と書きます。このようにして、得られる偏導関数

$$f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$$

あるいは、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

を**2階の偏導関数**とよびます。

【例21-5】

$y=x_1^2+x_1x_2+3x_2^2$の2階の偏導関数を求めます。$f_1=2x_1+x_2,\ f_2=x_1+6x_2$なので、

$$f_{11}=2,\ f_{12}=1,\ f_{21}=1,\ f_{22}=6$$

です。$f_{12}=f_{21}$であることに注意してください。私たちの扱うほとんどすべてのケースでは$f_{12}=f_{21}$が成り立ちます。

●極大値・極小値

$y=-x_1^2-x_2^2$は、$(x_1, x_2)=(0, 0)$以外の点では負となるので、$(x_1, x_2)=(0, 0)$で最大値0をとります。

同様に、$y=3-(x_1-1)^2-(x_2-2)^2$は、$(x_1, x_2)=(1, 2)$以外では、3より小さいですので、$(x_1, x_2)=(1, 2)$で、最大値3が与えられます。

[解答]

1.

(1) $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}=x_1x_3$

(2) $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}=\dfrac{1}{2}x_1x_2^{-\frac{1}{2}}+x_3$

2.

(1) $z=x_1^2x_2+x_3$とおくと $y=z^3$である。また、$\dfrac{dy}{dz}=3z^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}=2x_1x_2$である。よって、

$\dfrac{\partial y}{\partial x_1}=6x_1x_2(x_1^2x_2+x_3)^2$

(2) $z=x_1^2+x_2$とおくと $y=z^{-2}$である。また、$\dfrac{dy}{dz}=-2z^{-3}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x_1$である。よって、

$\dfrac{\partial y}{\partial x_1}=-4x_1(x_1^2+x_2)^{-3}$

3.

$\boldsymbol{f}_1=3x_1^2-3x_2=0$, $\boldsymbol{f}_2=81x_2^2-3x_1=0$である。$\boldsymbol{f}_1=0$から $x_2=x_1^2$。これを$\boldsymbol{f}_2=0$に代入すると、$81x_1^4-3x_1=0$。よって、

$x_1(27x_1^3-1)=0$

となる。$x_1>0$なので、$x_1=\dfrac{1}{3}$。このとき、$x_2=\dfrac{1}{9}$

4.

x_1の限界効用は $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=\dfrac{1}{3}x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}$、$x_2$の限界効用は $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=\dfrac{2}{3}x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{-\frac{1}{3}}$である。

5.

x_1の限界効用は $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=2x_1x_2^3$となる。これを x_1で偏微分すると $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=2x_2^3$。$x_2$で偏微分すると $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_1}=6x_1x_2^2$