補論 A
価格，生産性，交易条件のさまざまな指数

本書のさまざまな箇所で，価格や全要素生産性（TFP）を計測するときに，複数の指数を用いてきました。100年以上前から，どういう指数方式を選んだらよいかを教え導く理論が数多くあります。指標を理解することが実証研究に非常に役立つというと，いかにも計量経済学らしいのですが，計量経済学と銘打っているわりに，指標の使い方を教わることはほとんどありません。そこで，この補論で，価格指数に焦点を絞って，指数の扱いを自家薬籠中の物とするための解説をいたします[1]。

最初に，いくつかの価格指数の例を紹介しましょう。$p = (p_1, \cdots, p_N) > 0$ を価格ベクトルとし，$q = (q_1, \cdots, q_N) \geq 0$ をそれに対応する数量ベクトルとします。また p^i と q^i を，それぞれ２つの状況（$i = 0, 1$）を表わすベクトルとします。この２つの状況（$i = 0, 1$）とは，２時点，あるいは補論の後半では２国を表わすものと考えることができます。また，２時点間の指数の方式として，$P(p^0, p^1, q^0, q^1)$ という表記をしますが，これは，０から１の状況になったときの「平均的」な価格の変化を測るために，価格と数量の情報だけで表わしたものです。この表記を使った例としては，以下のラスパイレス価格指数（Laspeyres price index）があります。

$$P_L(p^0, p^1, q^0, q^1) \equiv \frac{\sum_{i=1}^N q_i^0 p_i^1}{\sum_{i=1}^N q_i^0 p_i^0} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{q_i^0 p_i^0}{\sum_{j=1}^N q_j^0 p_j^0} \right) \frac{p_i^1}{p_i^0} \tag{A.1}$$

この式を見るとわかりますが，ラスパイレス指数では，基準時点の数量でそれぞれの時点の価格を加重しています。

逆に，現在時点の数量を用いて価格を加重した場合には，以下のパーシェ価格指数（Paasche price index）が得られます。

1　この補論の大部分は，Alterman, Diewert, and Feenstra（1999）の第２章からの引用である。

$$P_P(p^0, p^1, q^0, q^1) \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i^1 p_i^1}{\sum_{i=1}^{N} q_i^1 p_i^0} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{q_i^1 p_i^0}{\sum_{j=1}^{N} q_j^1 p_j^0} \right) \frac{p_i^1}{p_i^0} \tag{A.2}$$

ここで，消費者の選択問題を考えたとき，パーシェ価格指数のほうがラスパイレス価格指数よりも数値が低くなることが予想されます。なぜなら，パーシェ指数は，現在時点の数量が使われているため，価格が大きく上昇したとき，消費者が財を代替することによって消費離れする，消費者の代替効果が含まれるからです。このとき，現在時点の消費は少なくなるので，パーシェ価格指数では低めに出やすく，ラスパイレス価格指数では消費離れする前の消費である基準時点の数量を用いているので高めに出るのです。のちに実際にそうなることを示します。３つ目のよく利用される指数は，アーヴィング・フィッシャー（Irving Fisher）の理想算式[†]と呼ばれる価格指数（ideal price index）P_F です。

$$P_F(p^0, p^1, q^0, q^1) \equiv [P_L(p^0, p^1, q^0, q^1) P_P(p^0, p^1, q^0, q^1)]^{1/2} \tag{A.3}$$

（A.3）式は，ラスパイレス価格指数とパーシェ価格指数の幾何平均（相乗平均）を表わしています。

† フィッシャーの理想算式は，一般に，基準時点と現在時点の両時点の価格や数量が著しく異なる場合を比較するときなどに用いられる。

もう一つ重要な指数方式に，トルンクヴィスト価格指数（Törnqvist price index）P_T があります（Törnqvist 1936）。これは，２時点の支出割合である $s_i^0 \equiv p_i^0 q_i^0 / \sum_{i=1}^{N} p_i^0 q_i^0$ と $s_i^1 \equiv p_i^1 q_i^1 / \sum_{i=1}^{N} p_i^1 q_i^1$ の平均値を加重として，価格比 (p_i^1/p_i^0) の幾何平均として定義されたもので，

$$P_T(p^0, p^1, q^0, q^1) \equiv \prod_{i=1}^{N} (p_i^1/p_i^0)^{(s_i^0 + s_i^1)/2} \tag{A.4}$$

あるいは，対数をとって，

$$\ln P_T(p^0, p^1, q^0, q^1) \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} (s_i^0 + s_i^1) \ln (p_i^1/p_i^0) \tag{A.4$'$}$$

になります。こうしたさまざまな方式のうち，果たしてどれを選んだらいいのでしょうか？　指数に関する経済的手法では，それぞれの指数を計算する方式が消費者や企業の行動をどの程度うまく反映しているかが問われます。まず消費者は，非相似拡大的な選好をもつと仮定されます（Diewert 1974, Pollack 1989を参照）。ここでは，企業にとっての問題に焦点を当て，企業が直面する生産要素価格や生産物価格の指数について考えます。さらに，どちらの場合でも，企業の生産性の変化の指数や，開放経済にしたときの交易条件の指数について展開していきます。

生産要素価格指数

生産者が直面している時点 t における正の生産要素の価格ベクトルを $p = (p_1, \cdots, p_N)$ とします。また，y を生産部門が生産するように求められている時点 t における M 次元の非負の生産量ベクトルとします。そうすると，t 時点の技術水準を用いたときの費用関数は，次のように定義されます。

$$C^t(p, y) \equiv \min_q \{p'q：ただし，(q, y)はS^tに含まれている\} \quad \text{(A.5)}$$

ここで，S^t は，時点 t の技術集合になります。つまり $C^t(p, y)$ は，時点 t の経済において，p の生産要素価格ベクトルのもとで，y の生産量ベクトルの生産量を実現する際の最小費用の大きさになります。また，生産性の向上は技術集合 S^t の拡張という形で示されるため，費用関数には，時点 t（$= 0, 1$）の添え字が付いています。

一般に，価格指数と生産性指数の最終目標は，時間を通じた費用価値 C^t の変化を計測することです。生産要素価格が上昇すると費用が増加し，生産性が向上すると費用が下がるといった費用の変化が起こります。ただし，この費用の変化が生産要素価格による効果なのか，それとも生産性による効果なのかを区別して，それぞれの効果を見るのは難しく，一般には費用全体の変化しか観察できません。ここで，費用全体の変化を，生産要素価格によるのか，生産性によるのか，あるいは生産量の変化によるのかといった具合にそれぞれの要素に分解します。

この目的を達成するために，時点 t の技術水準をもつ経済における任意の 2 時点，例えば時点 0 と時点 1 などの間の理論上の生産要素価格指数 P^t を，関数 C^t を用いて定義することができます。

$$P^t(p^0, p^1, y) = C^t(p^1, y)/C^t(p^0, y) \quad \text{(A.6)}$$

ここで，p^t は時点 t（$= 0, 1$）に直面する経済の生産物価格のベクトルを表わしています。また，y は生産量の基準ベクトルになります。ここでは，これを「理論上」の指数と呼びます。なぜなら，この数値は p^0，p^1，q^0，q^1 の情報だけで求めることはできず，C^t がどういう関数かにも依存するからです。この理論上の指数は，技術水準の変化には影響されないという利点がありますが，時点 t の技術水準が与えられたもとで計測されていることに注意する必要があります。まず，当面の目標は，（A.5）式の費用関数で表わされている特定の関数形式で，（p^0，p^1，q^0，q^1 といった価格と数量だけで決まる）観察可能な価格指数として，（A.6）式に等しく

なるような価格指数を求めることができるか，あるいは少なくとも上限と下限の範囲に収まるような価格指数を求めることができるかになります。

理論上の生産要素価格指数である（A.6）式において興味があるのは，２つの特別なケースです。それらは，(a) $P^0(p^0, p^1, y^0)$ で，これは，時点 0 の技術水準で時点 0 の実際の生産量ベクトル y^0 を使って求められる理論上の生産要素価格指数になります。もう一つは，(b) $P^1(p^0, p^1, y^1)$ で，時点 1 の技術水準で時点 1 の実際の生産量ベクトル y^1 を使って求められる理論上の生産要素価格指数になります。また，q^0 と q^1 を，それぞれ時点 0 と時点 1 で観察された生産要素の数量とします。ここで，この q^0 と q^1 は，（A.5）式の費用を最小化するために最適なものが選ばれたと仮定します。その結果，

$$C^0(p^0, y^0) = p^{0\prime}q^0, \quad C^1(p^1, y^1) = p^{1\prime}q^1 \tag{A.7}$$

が成り立ちます。こうした費用最小化の仮定によって，Fisher and Shell（1972, 57–58）や Archibald（1977, 66）の議論を適用して，２つの理論上の指数である $P^0(p^0, p^1, y^0)$ と $P^1(p^0, p^1, y^1)$ については，以下のような不等式の関係を示すことができます。

$$\begin{aligned}
P^0(p^0, p^1, y^0) &\equiv C^0(p^1, y^0)/C^0(p^0, y^0) && \text{（A.6）式の定義を用いて} \\
&= C^0(p^1, y^0)/p^{0\prime}q^0 && \text{（A.7）式を用いて} \\
&\le p^{1\prime}q^0/p^{0\prime}q^0 && \text{($C^0(p^1, y^0)$ は，時点 0 の技術水準で y^0 を実現するうえでの最小費用という定義を考えると，p^1 の生産物価格のもとで q^0 も実現可能であるため，$C^0(p^1, y^0) \le p^{1\prime}q^0$ となる} \\
&\equiv P_L(p^0, p^1, q^0, q^1)
\end{aligned}$$

ここで，P_L はラスパイレス価格指数です。同様に，

$$\begin{aligned}
P^1(p^0, p^1, y^1) &\equiv C^1(p^1, y^1)/C^1(p^0, y^1) && \text{（A.6）式の定義を用いて} \\
&= p^{1\prime}q^1/C^1(p^0, y^1) && \text{（A.7）式を用いて} \\
&\ge p^{1\prime}q^1/p^{0\prime}q^1 && \text{$C^1(p^0, y^1)$ は，時点 1 の技術水準で y^1 を実現するうえでの最小費用という定義を考えると，p^0 の生産物価格のもとで q^1 も実現可能であるため，$C^1(p^0, y^1) \le p^{0\prime}q^1$ となる} \\
&\equiv P_P(p^0, p^1, q^0, q^1)
\end{aligned}$$

ここで，P_P はパーシェ価格指数です。したがって，理論上の価格指数 $P^0(p^0, p^1, y^0)$ の上限は，生産要素価格のラスパイレス指数 P_L になり，理論上の価

格指数 $P^1(p^0, p^1, y^1)$ の下限は，生産要素価格のパーシェ指数 P_P になることがわかります。この上限と下限についてさらに調べるために，技術水準が一定の場合と変化する場合とに分けて議論しましょう。

●技術水準が一定の場合

もし，技術水準が一定であれば，パーシェ価格指数とラスパイレス価格指数によって，「真」の価格指数の範囲が得られます。つまり，もし，技術水準が一定であれば，どの時点でも技術水準が変わらないので，費用関数は C の右上の添え字のない $C(p, y)$ と表わすことができ，上記の範囲はただちに次の状況を示すことがわかります。

$$P_P(p^0, p^1, q^0, q^1) \leq C(p^1, y^1)/C(p^0, y^1),$$
$$C(p^1, y^0)/C(p^0, y^0) \leq P_L(p^0, p^1, q^0, q^1) \qquad \text{(A.8)}$$

これらの表現は，生産物が１つで規模に関して収穫が一定であると仮定すると，費用関数は $C(p, y) = yc(p)$ となり，さらに単純化することができます。ここで，$c(p)$ は単位費用関数です。その結果，（A.8）式の不等式は，次のように簡単化することができます。

$$P_P(p^0, p^1, q^0, q^1) \leq c(p^1)/c(p^0) \leq P_L(p^0, p^1, q^0, q^1) \qquad \text{(A.9)}$$

したがって，「真」の価格指数は企業の単位費用の比率になるのですが，これはパーシェ価格指数を下限，ラスパイレス価格指数を上限とすると，その範囲内にあります。これは，消費者にとっての価格指数についても同じことがいえ，その場合は単位費用の比率ではなく，２時点の単位支出関数の比率となります。このことは，先ほど述べたことを裏付けるものとなっています。つまり，消費者にとっての選択問題について，消費者が最適な消費量を選択したのであれば，パーシェ価格指数がラスパイレス価格指数よりも小さくなるのです。

こう考えたときに，指数についての経済的手法の最終目標でもある，次の問題，つまり果たして単位費用の比率に完全に一致する価格指数を作ることができるかという問題が出てきます。この問題を解決するために，費用関数にある特定の関数形式をあてはめて，$P(p^0, p^1, q^0, q^1) = c(p^1)/c(p^0)$ になるような価格指数方式があるかを調べることになります。実は，費用に対してある一定の関数形式をあてはめると，この等式を満たす価格指数方式が存在することがわかります。Diewert（1976）は，このケースを精密な（exact）価格指数と呼びました。次にこれを具体的に見ていきましょう。

例えば，２次生産関数 $y = (q'Aq)^{1/2}$ で，A はパラメータの対称行列で，$A = A'$

であるとします。この生産関数は，計算すればすぐにわかりますが，1次同次関数になっています。Diewert（1976, 130）は，この2次生産関数がいかなる線形同次関数 $f(q)$ であっても，ある点の周辺を2次のオーダーで近似することができることを示しました[2]。この理由から，Diewert は，この2次関数 $(q'Aq)^{1/2}$ を柔軟（flexible）な関数形と呼びました。もし A が可逆行列[3]であれば，費用関数は $C(p, y) = y(p'Bp)^{1/2}$ となります。ただし，$B = A^{-1}$ となることを示すことはそれほど難しくはありません。この場合，単位費用関数は，$c(p) = (p'Bp)^{1/2}$ となりますが，これもまた柔軟な関数形になります。

この結果，対応する2次生産関数と単位費用関数について，以下の定理が得られます。

【定理１】Diewert（1976）
もし生産関数と単位費用関数が2次で，かつ線形同次で，かつ観察された数量 $q^t(>0)$ が費用最小化していれば，次式が満たされる。

$$\frac{c(p^1)}{c(p^0)} = P_F(p^0, p^1, q^0, q^1) \tag{A.10}$$

（A.10）式の右辺の価格指数は，（A.3）式で定義されたフィッシャーの理想算式で，まさに2次単位費用関数になります。2次関数自体が柔軟なので，Diewert（1976）は，フィッシャー理想算式を最良の価格指数と呼びました。この定理の注目すべき特徴は，すべてのパラメータ A と B の値に対して，フィッシャー理想算式は単位費用関数の比率と等しくなるということです。直感的にどういうことかというと，こうしたパラメータが変化すると，最適な選択である q も変化するため，その背後のパラメータがどういう値なのかが「明らかになる」という感じです。最適な選択である q^t とそれぞれの価格の p^t を組み合わせて用いることで，B がわからなくても（A.10）式の単位費用関数の比率を計算することができるのです。いずれにしても，技術水準が一定であれば，「真」の生産要素価格指数の値は，フィッシャー理想算式を求めることで得られます。この結論は，指数の経済的手法のすば

2　すなわち，いかなる線形同次関数 $f(q)$ であっても，$(q^{*\prime}Aq^*)^{1/2} = f(q^*)$，$Aq^* = f_q(q^*)$，$A = f_{qq}(q^*)$ となるようなパラメータ A が存在するということ。

3　A が可逆行列ではない場合の単位支出関数の解については，Diewert（1976，134）で議論している。

らしさを示しています。

●技術が変化する場合

時間とともに技術水準が変化する場合は，比較的難しい状況になります。ここで困るのは，パーシェ指数やラスパイレス指数によって，時点 t（$=0,1$）に依存する理論上の価格指数 $p^t(p^0,p^1,y)$ に範囲が出てしまうということです。ただし，幸いなことに，この範囲の問題は，観察できるパーシェ価格指数とラスパイレス価格指数の間の数値で理論上の価格指数を定義することで解決できます。これを確かめるために，仮想的な費用関数を定義します。これは，時点 0 と時点 1 のそれぞれの技術集合 S^0 と S^1 を α で加重平均した参照技術（reference technology）と，時点 0 と時点 1 のそれぞれの純生産量ベクトル y^0 と y^1 を α で加重平均したものに対応した費用関数になります。すなわち，

$$C(p,\alpha)\equiv\min_q\{p'q:(1-\alpha)S^0+\alpha S^1\text{に属する}[q,(1-\alpha)y^0+\alpha y^1]\}\qquad\text{(A.11)}$$

ここで，この費用関数を使って，理論上の価格指数群を次のように定義することができます。

$$P(p^0,p^1,\alpha)\equiv C(p^1,\alpha)/C(p^0,\alpha)\qquad\text{(A.12)}$$

Diewert（1983, 1060–61）の証明を適用することで，パーシェ価格指数 P_P とラスパイレス価格指数 P_L の間に，(A.12) で定義される理論上の価格指数となる α が存在することを示すことができます[4]。

【定理 2】 Diewert（1983）

次式を満たすような α が 0 と 1 の間に存在する。

$$P_L\equiv p^{1\prime}q^0/p^{0\prime}q^0\le P(p^0,p^1,\alpha)\le p^{1\prime}q^1/p^{0\prime}q^1\equiv P_P$$

$$\text{あるいは，}P_P\le P(p^0,p^1,\alpha)\le P_L\qquad\text{(A.13)}$$

もし，パーシェ指数とラスパイレス指数がお互いに近い数字であれば，(A.13) 式から，「真」の経済の生産要素価格指数をかなり正しく求めることができます。以前に示した（A.3）式で定義したフィッシャー理想算式 P_F のように，P_L と P_P の平均をとることで「真」の指数にかなり近い合理的な近似値を求めることができるのです。これによって，たとえ技術が変化していても，フィッシャー理想算式を

4　すべての定理の証明については，ここであげた文献で確認することができる。

用いることを正当化できます。

また，技術変化の性質について，より特殊な仮定をおくことで，さらなる結果を得ることができます。具体的にいうと，時点 t（$=0,1$）の費用関数がトランスログ型の関数形であるとします[5]。

$$\begin{aligned}\ln C^t(p,y)=&\alpha_0^t+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^t\ln p_i+\sum_{k=1}^{M}\beta_k^t\ln y_k+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}^t\ln p_i\ln p_j\\&+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\delta_{kl}^t\ln y_k\ln y_l+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}\varphi_{ik}^t\ln p_i\ln y_k\end{aligned}\tag{A.14}$$

ただし，パラメータについては，$\gamma_{ij}^t=\gamma_{ji}^t$ の制約を満たし，さらに，

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^t=1,\quad \sum_{i=1}^{N}\gamma_{ij}^t=\sum_{i=1}^{N}\varphi_{ik}^t=0\tag{A.15}$$

であるとします。こうした制約によって，$C^t(p,y)$ が生産要素価格ベクトル p について線形同次であることを保証しています（これは，どんな費用関数もかならず満たさなければならない性質である）。この費用関数を見てわかるように，パラメータ α，β，γ，δ，φ は技術水準の変化を示し，各時点でまったく異なる数値になることもあります。

ここで，（A.14）式の 2 次の価格のパラメータについて，2 時点で等しいという制約を設けます。つまり，他のパラメータは時間を通じて変化するとしても，この項の係数については，$\gamma_{ij}^0=\gamma_{ij}^1$ とします。その結果，Caves, Christensen, and Diewert（1982, 140）の結論を適用することで，時点 0 と時点 1 の理論上の価格指数である $P^0(p^0,p^1,y^0)$ と $P^1(p^0,p^1,y^1)$ の幾何平均が，（A.4）式で定義されているトルンクヴィスト価格指数 P_T に等しくなることを示すことができます。

【定理 3】 Caves, Christensen, and Diewert（1982）
$\gamma_{ij}^0=\gamma_{ij}^1$ で，かつ両時点（$t=0,1$）における費用を最小化する生産要素量 q^t が狭義の正（真に正）であれば，

$$\left[P^0(p^0,p^1,y^0)\,P^1(p^0,p^1,y^1)\right]^{1/2}=P_T(p^0,p^1,q^0,q^1)\tag{A.16}$$

が成り立つ。

この結論で必要となる仮定は，かなり弱いように見えます。具体的には，どちら

5　この関数形は，Christensen, Jorgenson, and Lau（1971）で紹介され，名づけられた。また，Diewert（1974）では，支出関数や費用関数の文脈で適用している。

の時点でも技術が規模に関して収穫一定であるという仮定は必要ないのです。ここでの仮定は，比較している 2 時点間で技術進歩があっても矛盾しません。このとき，P_T の指数算式は，2 つの理論上の価格指数の幾何平均とまったく同じになります。この 2 つの価格指数はトランスログ型に対応していて，これらの価格指数自体が「柔軟」な関数形なので，トルンクヴィスト指数の算式は，最良であるということができます。

この結論の有用性を確認するために，0 時点と 1 時点の間の費用の全体の変化を 2 つの異なる方法で分解してみましょう。それは，

$$\frac{C^0(p^0, y^0)}{C^1(p^1, y^1)} = \frac{C^0(p^0, y^0)}{C^0(p^1, y^0)}\frac{C^0(p^1, y^0)}{C^0(p^1, y^1)}\frac{C^0(p^1, y^1)}{C^1(p^1, y^1)} \tag{A.17}$$

$$\frac{C^0(p^0, y^0)}{C^1(p^1, y^1)} = \frac{C^1(p^0, y^1)}{C^1(p^1, y^1)}\frac{C^1(p^0, y^0)}{C^1(p^0, y^1)}\frac{C^0(p^0, y^0)}{C^1(p^0, y^0)} \tag{A.18}$$

ですが，それぞれ分解されたものを見ると，右辺の最初の比率は，どちらも生産要素価格の変化を示しています。また，2 つ目の比率は，生産量ベクトルの変化を示しています。さらに，3 つ目の比率は，純然たる技術変化を示しています。ここで，技術変化あるいは TFP の尺度を（A.17）式と（A.18）式の最後の比率の幾何平均として定義します。すなわち，

$$\mathrm{TFP} \equiv \left[\frac{C^0(p^1, y^1)}{C^1(p^1, y^1)}\frac{C^0(p^0, y^0)}{C^1(p^0, y^0)}\right]^{1/2} \tag{A.19}$$

とします。純然たる技術変化によって，時点 0 から時点 1 にかけて費用が低下した場合は，この数値は上昇することを示しています。しかし，この定義からわかるように，このなかの費用の大きさは観察可能ではありません。つまり，実際には，時点 1 の生産物価格で時点 1 の生産量を実現するための時点 0 の技術水準下の費用（$C^0(p^1, y^1)$）と時点 0 の生産物価格で時点 0 の生産量を実現するための時点 1 の技術水準下の費用（$C^1(p^0, y^0)$）のどちらもわからないのです。しかしながら，定理 3 を用いて，間接的に TFP を計測することができます。具体的には，（A.17）式と（A.18）式の幾何平均を求めて，（A.19）式を用いると，次式が得られます。

$$\frac{C^0(p^0, y^0)}{C^1(p^1, y^1)} = P_T(p^0, p^1, q^0, q^1)^{-1} \times \mathrm{TFP} \times \left[\frac{C^1(p^1, y^0)}{C^1(p^1, y^1)}\frac{C^0(p^0, y^0)}{C^0(p^0, y^1)}\right]^{1/2} \tag{A.20}$$

したがって，時点 0 から時点 1 にかけての費用の全体の変化は，トルンクヴィスト生産要素価格指数の逆数と TFP と，（A.20）式の最後の項は生産量の変化とに分解できます。のちほど，この最終項の計測手法を見ますが，ここではかなり単純な結果になることを確認してください。

もし生産物が 1 つであれば，y^t はスカラーになり，費用関数はこの生産量において線形同次になります。その結果，費用関数は，$C^t(p, y) = yc^t(p)$（ただし，$c^t(p)$ は単位費用関数）と表わすことができます。この場合，（A.20）式の最後の角括弧の項は，単純に y^0/y^1 となります。この生産量の比率は，（A.20）式の左辺にも現われて，左辺は $(y^0/y^1)[(c^0(p^0)/c^1(p^1)]$ になるので，この生産量の比率が両辺で相殺されます。その結果，（A.20）式を再び書き直して，TFP を次のように求めることができます。

$$\ln(\mathrm{TFP}) = \ln P_T(p^0, p^1, q^0, q^1) - \ln[c^1(p^1)/c^0(p^0)] \qquad \text{(A.21)}$$

もしこの産業が完全競争をしているならば，単位費用関数は生産物価格と等しくなり，（A.21）式の右辺の単位費用の比率は，2 時点の生産物価格の比率に置き換えることができます。すると，（A.21）式は第 4 章で用いた TFP の双対トルンクヴィスト尺度（dual Törnqvist measure of total factor productivity）となり，生産要素価格の変化の加重平均から生産物価格の変化を引いたものとなります。上記の結果は，この指数（あるいは，その主要な対照をなす，対数を取った生産量から生産要素量のトルンクヴィスト指数の対数を取ったものを引いた変化の大きさ）を利用するにあたって，厳密に正当化されているので，一般に生産性の変化を測る尺度として「最良」であると考えられています。

GDP 価格指数

上記の結論は，ある経済の GDP 価格指数に対して容易に拡張することができます。ここで，生産量 $q = (q_1, \cdots, q_N)$ と生産要素賦存量 $v = (v_1, \cdots, v_M)\ (\geq 0)$ の時点 t を通じての実現可能集合が S^t で，$N + M$ 次元空間の部分集合であるとします。また，生産量について次のような約束があるとします。つまり，もし商品 i が時点 t における生産物で純生産となっているのであれば，対応する数量 q_i^t は正になるのに対して，もし商品 i が時点 t で生産要素であれば，対応する数量 q_i^t は負になるとします。ちなみに，後者は輸入された中間投入財を含んだものとします。すると，すべての純生産について価格と数量を掛け合わせてそれらを合計したもの，つまり $\sum_{i=1}^{N} p_i^t q_i^t$ は，経済の純収入あるいは GDP になります。

また，$p = (p_1, \cdots, p_N)$ を時点 t において生産者が直面する純生産物価格の正のベクトルとします。そうすると，時点 t における技術を用いたときの収入関数あるいは GDP 関数は，次のように定義することができます。

$$G^t(p, v) \equiv \max_q \{p'q：ただし，(q, v)はS^tに含まれている\} \qquad \text{(A.22)}$$

したがって，$G^t(p, v)$ は，時点 t の技術を用いて，純生産要素ベクトル v が使用できたとして，この経済が生産できる（純）生産の最大値となります。

このように，GDP 関数を使うことで，この経済の時点 t の技術を，任意の 2 時点間の理論的 GDP 価格指数 P^t として定義できます。例えば，時点 0 と時点 1 間の GDP 価格指数は以下のとおりです。

$$P^t(p^0, p^1, v) = G^t(p^1, v)/G^t(p^0, v) \tag{A.23}$$

ここで p^t は，時点 t（$= 0, 1$）において経済が直面する純生産物価格ベクトルで，v は生産要素賦存量の基準ベクトルになります。

このとき，（A.23）式は，どの (t, v) の基準技術や生産要素ベクトル v を選ぶかによって異なるので，多岐にわたる価格指数が得られます。またここでも，２つの特別なケースに注目します。一つは，(a) $P^0(p^0, p^1, v^0)$ で，これは時点 0 の技術を用いて，時点 0 で実際に用いられた生産要素ベクトル v^0 の価格指数です。もう一つは，(b) $P^1(p^0, p^1, v^1)$ で，これは時点 1 の技術で生産要素ベクトル v^1 を用いたときの価格指数です。ここで，q^0 と q^1 をそれぞれ時点 0 と時点 1 の観察された純生産物ベクトルとします。もし，時点 0 と時点 1 で生産者側が競争的行動をしていれば，時点 0 と時点 1 で観察された GDP は，それぞれ $G^0(p^0, v^0)$ と $G^1(p^1, v^1)$ になります。つまり，

$$G^0(p^0, v^0) = p^{0\prime}q^0,\quad G^1(p^1, v^1) = p^{1\prime}q^1 \tag{A.24}$$

になります。そうすると，Fisher and Shell（1972, 57–58）と Archibald（1977, 66）の結論を使って，ここでも一連の理論上の指数における不等式を展開することができます。

$$\begin{aligned}
P^0(p^0, p^1, v^0) &\equiv G^0(p^1, v^0)/G^0(p^0, v^0) && \text{（A.23）式の定義を用いて} \\
&= G^0(p^1, v^0)/p^{0\prime}q^0 && \text{（A.24）式を用いて} \\
&\geq p^{1\prime}q^0/p^{0\prime}q^0 && G^0(p^1, v^0)\ \text{は，時点 0 の技術水準で}\ v^0\ \text{を用いて収入を最大化するという定義を考えると，}p^1\ \text{の生産物価格下で}\ q^0\ \text{も実現可能であるため，}G^0(p^1, v^0) \geq p^{1\prime}q^0\ \text{となる} \\
&\equiv P_L(p^0, p^1, q^0, q^1)
\end{aligned}$$

ここで，P_L はラスパイレス価格指数です。同様に，

$$
\begin{aligned}
P^1(p^0, p^1, v^1) &\equiv G^1(p^1, v^1)/G^1(p^0, v^1) && \text{（A.23）式の定義を用いて} \\
&= p^{1\prime}q^1/G^1(p^0, v^1) && \text{（A.24）式を用いて} \\
&\leq p^{1\prime}q^1/p^{0\prime}q^1 && G^1(p^0, v^1)\text{ は，時点 1 の技術水準で }v^1\text{ を用いて収入を最大化するという定義を考えると，生産物価格 }p^0\text{ のもとで }q^1\text{ も実現可能であるため，}G^1(p^0, v^1) \geq p^{0\prime}q^1\text{ となる} \\
&\equiv P_P(p^0, p^1, q^0, q^1)
\end{aligned}
$$

ここで，P_P はパーシェ価格指数です。こうした不等号の向きが，これと対照的な生産要素価格指数の場合と逆の方向になることがわかります。これは，（A.5）式が費用を最小化しているのに対して，（A.22）式は収入を最大化していることを反映しています。

また，生産要素価格指数と同様に，観察できるパーシェ価格指数とラスパイレス価格指数の間の数値で，理論上の GDP 価格指数を定義することができます。そのために，最初に仮想的な GDP 関数 $G(p, \alpha)$ を定義します。これは，時点 0 と時点 1 のそれぞれの技術集合 S^0 と S^1 を α で加重平均した参照技術（reference technology）と，時点 0 と時点 1 のそれぞれの生産要素ベクトル v^0 と v^1 を α で加重平均したものに対応した関数になります。すなわち，

$$G(p, \alpha) \equiv \min_q \{p'q : (1-\alpha)S^0 + \alpha S^1 \text{に属する} [q, (1-\alpha)v^0 + \alpha v^1]\} \tag{A.25}$$

ここで，（α を指標とした）理論上の GDP 価格指数群を次のように定義することができます。

$$P(p^0, p^1, \alpha) \equiv G(p^1, \alpha)/G(p^0, \alpha) \tag{A.26}$$

（A.26）式の理論上の指数についても，上で述べたように定理 2 が引き続き満たされることがわかります。すなわち，（A.26）式の理論上の GDP 価格指数が，観察できるパーシェ指数とラスパイレス指数の間にくるような α が 0 と 1 の間に存在します。ただし，この結論には重要な必要条件があります。つまり（A.13）式にあるように，$P_L \geq P_P$ か $P_L \leq P_P$ かというのは一般にはわからないのです。生産要素価格指数のときは，技術水準が一定の場合，費用最小化行動によって，ラスパイレス価格指数がパーシェ価格指数を上回っていました。これは，前者の価格指数では，基準時点の数量を使っていて，生産要素価格が最も上昇した生産要素を他の生産要素に代替しようとして企業がその数量を減らすことが反映されないからです。逆に，GDP 価格指数では，技術水準が一定であれば，企業は最も上昇した価格の財を代替して生産を増やそうとします。この結果，パーシェ価格指数がラスパイレ

ス価格指数を上回るのです。しかしながら，実際には，一般に GDP 価格指数でもラスパイレス価格指数がパーシェ価格指数を上回ります。これと同じことは，数量指数でもあてはまります。つまり，ラスパイレス数量指数は，一般にパーシェ数量指数を上回ります[6]。この実証的な規則性は，Alexander Gerschenkron（1951）の研究にちなんで，「ガーシェンクロン効果（Gerschenkron effect）」と呼ばれます[7]。

このガーシェンクロン効果があてはまらないケースが，与えられた生産可能性曲線（PPF）のもとで技術水準が一定とされている図 A.1に描かれています。この図では，財 2 をニュメレールとしており，縦軸の切片までの長さが GDP の大きさになります。また，当初の価格下では，生産は A 点となり，GDP の大きさは，縦軸の財 2 の量で換算して OA の長さになります。これが新しい価格になると，生産は B 点になり，GDP の大きさは，財 2 の量で換算して OB の長さになります。したがって，OB/OA の比率が，理論上の GDP 価格指数になります。ここで，ラスパイレス価格指数を見ると，当初の数量下で価格の変化を評価したものなので，図では OA'/OA となり，図より $OA'/OA < OB/OA$ となることがわかります。一方で，パーシェ価格指数を見ると，新しい数量下で価格の変化を評価したものなので，図では OB/OB' となり，図より $OB/OB' > OB/OA > OA'/OA$ となることがわかります。したがって，パーシェ指価格数がラスパイレス価格指数を上回ることがわかります。このことから，技術水準が一定のときは，生産者が生産物を代替することによって，パーシェ価格指数がラスパイレス価格指数を上回ることを確認することができます。

これとは対照的に，図 A.2では，技術水準の変化によって，PPF が外側に移動したものになっています。価格が不変のもとでは，生産は A 点から B 点に移動し，GDP が増大します（GDP は，直線 AA と直線 BB が縦軸で交わる切片の長さの分だけ増加する）。しかし，ここで財 1 の相対価格が供給の増大によって低下したと

---

6 （A.1）と（A.2）式から，ラスパイレス数量指数とパーシェ数量指数は，それぞれ $Q_L(p^0, p^1, q^0, q^1) \equiv P_L(q^0, q^1, p^0, p^1)$ と $Q_P(p^0, p^1, q^0, q^1) \equiv P_P(q^0, q^1, p^0, p^1)$ と定義される。つまり，価格指数のなかの価格と数量をただ入れ替えただけのものになる。また，$Q_L(p^0, p^1, q^0, q^1)$ $P_P(p^0, p^1, q^0, q^1) = Q_P(p^0, p^1, q^0, q^1) P_L(p^0, p^1, q^0, q^1) = p^{1\prime}q^1/p^{0\prime}q^0$ となることもすぐに確かめることができるが，これは，2 時点の財に対する総支出額の比率となる。そうすると，価格指数が $P_L \geq P_P$ であれば，すぐに数量指数においても $Q_L \geq Q_P$ になることがわかる。

7　ガーシェンクロン効果についての最近の研究には，さまざまな OECD の国々や経済移行国について取り上げた Van Ark, Monnikhof, and Timmer（1999），ソ連について取り上げた Dikhanov（1999），米国の輸出価格指数について取り上げた Alterman, Diewert, and Feenstra（1999）などがある。

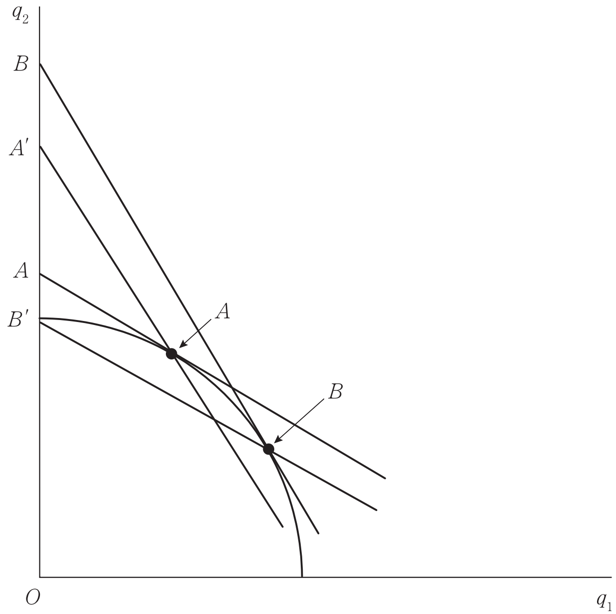

図 A.1

します。その結果，新しい価格でもある直線 CC の傾きが小さくなったとします。この場合，生産は B 点ではなく，B' 点になります。ところで，ここで描かれている図では，予算線 AA と CC がともに無差別曲線 U に接し，効用水準が一定のもとで供給が変化したことで，均衡価格が変化したようすが示されています。

また図 A.2では，生産点である A 点と B' 点は原点からのびる同じ半直線上にあり，２つの財の相対生産量は変化していません。この相対生産量が変化しないことから，A 点あるいは B' 点の生産量を使って求められるラスパイレス価格指数とパーシェ価格指数は同じ数値になります。実際に，ラスパイレス価格指数は，A 点の当初の生産量が使われ，GDP が古い価格下での縦軸の大きさになるので，OA の長さになり，一方，新しい価格のもとでは OC' の長さが GDP になることから，価格指数は OC'/OA となります。そしてこの価格指数は，１より小さくなることから，財１の価格が大幅に低下したようすがわかります。またパーシェ価格指数は，B' 点の生産量で評価された大きさですが，まったく同じ結果になります。ただ，財１の供給が増えてその相対価格が低下したとしても，もし PPF に沿って B' 点が原点からのびる半直線のわずかに右にあったとしたら，相対生産量が低下する

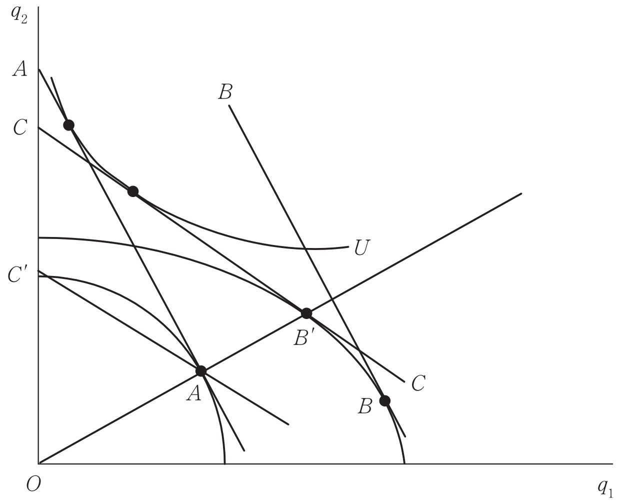

図 A.2

ので，パーシェ価格指数はラスパイレス価格指数よりも小さくなります。これがガーシェンクロン効果になります。

このようにラスパイレス価格指数がパーシェ価格指数を上回った場合は，技術水準（あるいは生産要素賦存量）が変化したことの間接的な証拠になります。(A.26) 式で定義された理論上の GDP 価格指数 $P(p^0, p^1, \alpha)$ は，技術水準や生産要素賦存量を一定とした場合に満たされるとしているので，価格の変化を測る尺度して，理論上の価格指数は適切なものであるといえます。定理 2 では，この理論上の指数をパーシェ価格指数とラスパイレス価格指数の平均として求めることができるとしていますが，生産要素価格指数のときと同様，生産物価格指数としてフィッシャー理想算式を使うことを正当化する一つの方法であるといえます。

また技術水準の変化によって，パラメータが時間とともに変化するトランスログ型の GDP 関数を用いることで，さらなる結論を得ることができます。

$$\begin{aligned}\ln G^t(p, v) = \alpha_0^t + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^t \ln p_i + \sum_{k=1}^{M} \beta_k^t \ln v_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij}^t \ln p_i \ln p_j \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} \delta_{kl}^t \ln v_k \ln v_l + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \varphi_{ik}^t \ln p_i \ln v_k\end{aligned} \tag{A.27}$$

ここで，トランスログ型の GDP 関数が価格について 1 次同次であることを保証するために，対称性である $\gamma_{ij}^t = \gamma_{ji}^t$ の制約を課し，さらに必要条件として，

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^t = 1,\quad \sum_{i=1}^{N}\gamma_{ij}^t = \sum_{i=1}^{N}\varphi_{ik}^t = 0 \tag{A.28}$$

であるとします。さらに，GDP 関数が要素賦存量について 1 次同次であることを保証するために，対称性である $\delta_{kl}^t = \delta_{lk}^t$ の制約を課し，さらに，必要条件として，

$$\sum_{k=1}^{M}\beta_k^t = 1,\quad \sum_{k=1}^{M}\delta_{kl}^t = \sum_{k=1}^{M}\varphi_{ik}^t = 0 \tag{A.29}$$

であるとします。ここでも価格について 2 次のパラメータとなっている γ_{ij}^t は一定であるとしますが，次の結論（定理 4 ）は，トランスログ型の費用関数の定理 3 と完全に相似します。この結論は，Caves, Christensen, and Diewert（1982）の議論を適用して得られます。また，この結論では，GDP 関数が要素賦存量について 1 次同次であることを必要としませんが，（A.29）の制約式はのちに利用します。

【定理 4 】Caves, Christensen, and Diewert（1982）
$\gamma_{ij}^0 = \gamma_{ij}^1$ を仮定し，かつ両時点（$t = 0, 1$）における産出量 q^t が価格 p^t ($t = 0, 1$) において収入を最大化しているのであれば，

$$[P^0(p^0, p^1, v^0)\, P^1(p^0, p^1, v^1)]^{1/2} = P_T(p^0, p^1, q^0, q^1) \tag{A.30}$$

が成り立つ。

これは，理論上の GDP 価格指数である $P^0(p^0, p^1, v^0)$ と $P^1(p^0, p^1, v^1)$ の幾何平均が（A.4）式で定義されたトルンクヴィスト価格指数に等しくなるというものです。ただし，定理 3 とは異なり，数量 q^t は狭義の正であると仮定する必要はありません。というのも，$q_i^t > 0$ は産出を意味し，$q_i^t < 0$ は投入を意味し，2 時点で一方から他方へ商品を切り替えることができ，正であっても負であってもかまわないからです。しかし，この解釈は重大な問題を引き起こします。つまり，$q_i^t < 0$ が中間投入財が輸入されることを示すのに対して，$q_i^t > 0$ は商品が輸出されることを示すのですが，生産価格指数は，交易条件効果と他の価格の動きが混ざった形で測定される形になっているのです。これは実際にあることで，次節では，Diewert and Morrison（1986）と Kohli（1990b, 2004）の結論を用いて，交易条件の効果と生産性とを別々に測定します。

交易条件と生産性

ここでふたたび，生産性の向上と財 1 の相対価格の低下を描いた図 A.2に戻りま

しょう。図に描かれた例では，パーシェ生産価格指数とラスパイレス生産価格指数が等しくなっており，これらの指数が $OC'/OA<1$ であることから，かなり大幅に価格が低下していることがわかることは，すでに述べたとおりです。また財 2 をニュメレール財として使うと，その結果として GDP の大きさ（縦軸で計測される）は OA から OC（率でいうと OC/OA）へと，減少幅はずっと小さくなることがわかります。GDP の変化を価格指数で割ると，実質 GDP の変化の度合いを求めることができます。つまり，GDP の変化は OC/OA，価格指数の変化は OC'/OA であることから，実質 GDP の変化は，$(OC/OA)/(OC'/OA)=OC/OC'>1$ となります。したがって，実質 GDP は上昇します。これは図でも，生産は A 点から B' 点へと増加しており，まったく適切です。実際に，縦軸上の OC/OC' の比率は，原点からの半直線上の OB'/OA の比率と同じ大きさになっていて，生産量や実質 GDP の増加を正確に測ったものだといえます。したがって，GDP 価格指数とそれに対応する実質 GDP の尺度が，技術水準の変化や生産要素の蓄積などによって，PPF が外側に移動したことを正確に反映していると結論づけることができます。

次に，違う質問を投げかけてみましょう。それは，図 A.2の U で描かれている無差別曲線をもつ代表的消費者の生計費がどうなるかということです。消費者の正確な生計費指数†を求めるために，図 A.2における当初の支出額である OA と新しい支出額である OC とを比べます。このとき，両方の金額は，一定の効用水準 U が維持される形で，ニュメレール財である財 2 で測られたものとなっています。したがって，生計費指数は OC/OA（<1）になります。ここで注意してほしいのは，この指数は GDP 価格指数とまったく同じ価格を使って作られていますが，加重として用いられている数量は異なるということです。つまり，生計費指数では需要された数量を用いているのに対して，GDP 価格指数では供給された数量を用いているのです。このため，2 つの指数の数値は異なるだろうことが予想されます。ここでの例でいうと，生計費指数は OC/OA となり，OC'/OA の GDP 価格指数を上回っています。実際に，2 つの指数の違いは，完全に経済における交易条件の変化によるものです。財 1 の相対価格の低下は，生計費指数よりも GDP 価格指数により大きく反映されます。なぜならば，輸出財では生産が消費を上回っており，輸出財価格の低下によって，交易条件が悪化するからです。

† 生計費指数は勤労世帯だけを対象に算出されるもので，消費者全体の消費を対象にして算出される消費者物価指数とは異なる。

これらをまとめると，上記の議論から，以下のように交易条件指数を定義するこ

とができます。つまり，

交易条件指数≡ GDP 価格指数／生計費指数 （A.31）

ただし，これらの指数はすべて，経済全体で販売された一連の最終財で計算しています。さらに定義を展開して，（A.4）式や（A.4′）式のトルンクヴィスト指数について考えてみます。まず，時点 t（$=0,1$）の価格 p^t と消費された数量 q^t から計算した生計費指数を $P_T(p^0,p^1,q^0,q^1)$ とします。それに加えて，時点 t（$=0,1$）の価格 p^t と生産された数量 y^t から計算した GDP 価格指数を $P_T(p^0,p^1,y^0,y^1)$ とします。また，最終財の純輸出を単純に $x^t=y^t-q^t$ と表わし，さらに簡単にするために貿易収支が均衡していて，$p^{t\prime}x^t=p^{t\prime}y^t-p^{t\prime}q^t=0$ であるとします。そうすると，（A.4′）式からすぐに以下の式を求めることができます。

$$\ln P_T(p^0,p^1,y^0,y^1)-\ln P_T(p^0,p^1,q^0,q^1)$$
$$\equiv\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p_i^0x_i^0}{p^{0\prime}y^0}+\frac{p_i^1x_i^1}{p^{1\prime}y^1}\right)\ln\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right) \qquad (A.32)$$

（A.32）式の左辺は，対数をとった GDP 価格指数と対数をとった生計費指数の差になっています。一方，右辺は，2時点間の GDP に対する輸出額の平均値を加重とした価格指数になっています。この加重については，輸入財であれば負になるので，（A.32）式の右辺は確かに交易条件指数を表わすと判断することができます。

こうした結論は，Diewert and Morrison（1986）にあるように，中間投入財を含んだ輸入財にまで拡張することができます。この拡張について考えるために，商品を3つのグループに分けます。つまり，1つ目は，国内最終需要（$i=1,\cdots,N_d$ について，$q_{di}^t>0$ かつ $p_{di}^t>0$）で，2つ目は，輸出財（$i=1,\cdots,N_x$ について，$q_{xi}^t>0$ かつ $p_{xi}^t>0$）で，3つ目は，輸入された中間投入財（$i=1,\cdots,N_m$ について，$q_{mi}^t<0$ かつ $p_{mi}^t>0$）になります。すべての商品の数量ベクトルは，$q^t=(q_d^t,q_x^t,q_m^t)$ で，そのときの価格は $p^t=(p_d^t,p_x^t,p_m^t)$ になります。すると，企業が収入を最大化したときの数量を q^t としたとき，経済の GDP 関数は，この場合も（A.22）式のように定義することができます。また，GDP 関数が（A.27）～（A.29）式のトランスログ型であると仮定します。

ここで，この GDP 関数について，理論上の生産性指数を次のように定義します。

$$R(p,v)=G^1(p,v)/G^0(p,v) \qquad (A.33)$$

この理論上の指数は，価格と生産要素賦存量を固定して，時点0と時点1の間の生産性の変化だけを考えたものになっています。ここで，2つの特別なケースを考えてみます。一つは，(a)ラスパイレス生産性指数 $R_L\equiv R(p^0,v^0)=G^1(p^0,v^0)/G^0(p^0,v^0)$

で，時点 0 の価格と生産要素賦存量を用いて計算することができます。またもう一つは，(b) パーシェ生産性指数 $R_P \equiv R(p^1, v^1) = G^1(p^1, v^1)/G^0(p^1, v^1)$ で，時点 1 の価格と生産要素賦存量を用いて計算することができます。この 2 つの生産性指数は，観察することができません。ただし，(A.19)～(A.21) 式の生産性の議論にあったように，幾何平均を計測することができます。

【定理 5】 Diewert and Morrison（1986）
GDP 関数が，(A.27)～(A.29) 式のトランスログ型であり，収入を最大化する数量 q^t が非ゼロであれば，

$$(R_L R_P)^{1/2} = \left(\frac{p^{1\prime}q^1}{p^{0\prime}q^0}\right) / [P_T(p^0, p^1, q^0, q^1) Q_T(w^0, w^1, v^0, v^1)] \qquad \text{(A.34)}$$

が成り立つ。

(A.34) 式の右辺の最初の項は，2 時点間の GDP 比率，あるいは名目 GDP の成長になっています。この数値は，右辺の他の 2 つの項によって割り引かれています。割り引いているのは，一つは (A.4) の算式を用いた GDP のトルンクヴィスト価格指数で，もう一つは生産要素賦存量のトルンクヴィスト数量指数です。生産要素賦存量のトルンクヴィスト数量指数は，次のように定義されます。

$$\ln Q_T(w^0, w^1, v^0, v^1) \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{w_i^0 v_i^0}{w^{0\prime}v^0} + \frac{w_i^1 v_i^1}{w^{1\prime}v^1}\right) \ln\left(\frac{v_i^1}{v_i^0}\right) \qquad \text{(A.35)}$$

これは，経済の主要な生産要素について，生産要素割合で加重平均した伸びを表わしたものです。また (A.29) 式の仮定のもとで，GDP 関数は v について線形同次，すなわち $p^{t\prime}q^t = w^{t\prime}v^t$ であれば，トルンクヴィスト価格指数とトルンクヴィスト数量指数はどちらも GDP について計測することができます。定理 5 は，(A.19)～(A.21) 式で導出した TFP を一般化したもので，複数の生産要素や生産物を考慮したものになっています。

次に，(A.34) 式の右辺にある GDP のトルンクヴィスト価格指数を，国内財，輸出財，輸入財に対応する部分に分解してみましょう。これは，

$$\begin{aligned} \ln P_T(p^0, p^1, q^0, q^1) = & \sum_{i=1}^{N_d} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p_{di}^0 q_{di}^0}{p^{0\prime}q^0} + \frac{p_{di}^1 q_{di}^1}{p^{1\prime}q^1}\right) \ln\left(\frac{p_{di}^1}{p_{di}^0}\right) \\ & + \sum_{i=1}^{N_x} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p_{xi}^0 q_{xi}^0}{p^{0\prime}q^0} + \frac{p_{xi}^1 q_{xi}^1}{p^{1\prime}q^1}\right) \ln\left(\frac{p_{xi}^1}{p_{xi}^0}\right) \\ & + \sum_{i=1}^{N_m} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p_{mi}^0 q_{mi}^0}{p^{0\prime}q^0} + \frac{p_{mi}^1 q_{mi}^1}{p^{1\prime}q^1}\right) \ln\left(\frac{p_{mi}^1}{p_{mi}^0}\right) \end{aligned} \qquad \text{(A.36)}$$

となります。（A.36）式の解釈としては，右辺の最初の合計値は，消費者による国内最終需要の数量と価格を用いているので，生計費指数になります。この最初の合計値に指数をとったものがトルンクヴィスト価格指数 $P_T(p_d^0, p_d^1, q_d^0, q_d^1)$ で，その割合は GDP の合計である $p^{t\prime}q^t$ に対して計算されています。また，２つ目と３つ目の項は，それぞれ輸出価格指数と輸入価格指数で，それらの差となっています（$q_{mi}^t < 0$ を思い出してほしい）。また，これら２つの合計値に指数をとって１つにしたものをトルンクヴィスト指数 $P_T(p_{xm}^0, p_{xm}^1, q_{xm}^0, q_{xm}^1)$ として表わします。これについても，その割合は GDP の合計である $p^{t\prime}q^t$ に対して計算されています。

すると，（A.34）式の結果を次のように書き直すことができます。すなわち，

$$\left(\frac{p^{1\prime}q^1}{p^{0\prime}q^0}\right) = (R_L R_P)^{1/2} P_T(p_d^0, p_d^1, q_d^0, q_d^1) P_T(p_{xm}^0, p_{xm}^1, q_{xm}^0, q_{xm}^1) Q_T(w^0, w^1, v^0, v^1) \tag{A.37}$$

したがって，名目 GDP の比率は，TFP 指数，生計費指数，交易条件指数，そして生産要素賦存量の数量指数に分解できることがわかります。Kohli（2004）は，代表的消費者の厚生水準の変化の尺度を求めるために，GDP の成長を割り引きたいのであれば，そのデフレータは GDP 価格指数ではなく，むしろ生計費指数を用いるべきだと主張しています。つまり，厚生水準の変化の尺度は，

$$\left(\frac{p^{1\prime}q^1}{p^{0\prime}q^0}\right) / P_T(p_d^0, p_d^1, q_d^0, q_d^1) = (R_L R_P)^{1/2} P_T(p_{xm}^0, p_{xm}^1, q_{xm}^0, q_{xm}^1) Q_T(w^0, w^1, v^0, v^1) \tag{A.38}$$

であるべきだというわけです。分解したものを見ると，生産性の伸び，交易条件の改善，そして生産要素賦存量の成長といったものすべてが厚生水準に積極的に貢献する形になっています。また，この厚生水準の尺度は，通常の方法で実質 GDP の成長を計算するのとはまったく異なります。つまり，通常の方法だと，実質 GDP を計算するにあたっては，名目 GDP の比率を GDP 価格指数で割り引きます。すなわち，

$$\left(\frac{p^{1\prime}q^1}{p^{0\prime}q^0}\right) / P_T(p^0, p^1, q^0, q^1) = (R_L R_P)^{1/2} Q_T(w^0, w^1, v^0, v^1) \tag{A.39}$$

となります。（A.39）式に対数をとったものは，国民所得統計では実質 GDP 成長として報告されています。しかし，これだと厚生水準の向上の源泉でもある交易条件の変化を除外することになります。一方，（A.38）式は，名目 GDP を国内財だけで計算された価格指数，つまり国内で吸収された財である $C + I + G$ についての価格指数で割り引いたものになります。生計費指数は輸出財や輸入財を含めた

GDPのすべての構成要素である$C+I+G+X-M$について計算されていて，代表的消費者に対する変化を評価するのによりふさわしい「実質厚生水準」の尺度を求めることができるのです。Kohli（1990b, 2004）では，名目GDPを生計費指数で割り引くことで，一部の国（例えばスイス）では実質GDP成長率よりも「実質厚生水準」の成長率のほうがかなり高くなることを示しています。最近では，そうした一部の国々について，交易条件の改善という形で説明されています。

各国間の実質GDPの測定

この補論では，これまでGDP価格指数や交易条件価格指数を含めた，経時的な価格指数の測定を論じてきました。しかし，各国間の実質GDPの測定について考えることも重要です。この場合，生産側（output side）の実質GDPと支出側（expenditure side）の実質GDPとで区別することができます。この区別は，単純な図A.2に描かれています。この図を使って，PPFが技術水準の変化によって外側に移動したのではなく，異なる2つの国に対応して2つのPPFが描かれていると考えます。まず当初の価格が2つの国で等しく，A国ではA点で，B国ではB点で生産が行われているとします。しかしこのとき，財1の相対供給量がB国で増加したために，B国での財1の相対価格がA国よりも低下したとします。その結果，B国の相対価格が直線CCの傾きで示されたとします。すると，B国の生産はB点ではなく，B'点で行われるようになります。この図では，2つの国の代表的消費者の効用水準が同一で，予算線AAとCCが両方とも無差別曲線Uに接する形になっています。

この図では，生産点AとB'点が原点から同じ半直線上にあるように描かれていて，2つの財の相対生産量が同じ大きさになっています。これは，A国に対するB国の実質生産量のいかなる指数もOB'/OAとなり，その値は1よりも大きく，B国にとって両方の財の生産量が比例的に増加するようすがわかります。これが生産側から測ったA国に対するB国の実質GDPの大きさ，あるいは別の表現をすると，A国に対するB国の実質GDP^oになります。実際に，2国間の実質GDPは，名目GDP比率を正確なGDP価格指数で割り引くことで計測することができます。この正確なGDP価格指数には，フィッシャーの理想算式の価格指数が用いられます。また，このときのGDP価格指数は，その計算過程において2つの国の生産数量を使って求めるものになっています。

次に，ここでも異なる質問を投げかけてみましょう。2つの国の代表的消費者の

厚生水準を比較するにはどのようにしたらいいでしょうか。図 A.2では，代表的消費者の効用水準は，U で示された無差別曲線のもとで両国では同じ水準になっています。したがって，消費者の厚生水準の正確な測定値，別の言い方をすれば，支出側から測った実質 GDP^e は，他方の国に対するもう一方の国では１になります。実際に，もう一方の国に対するある国の実質 GDP^e は，２つの国の相対名目支出を正確な消費者物価指数によって割り引くことで測ることができます。この正確な消費者物価指数は，生産数量ではなく，消費数量を用いて作られます。GDP 価格指数と消費者物価指数との間の違いに関する別の見方としては，GDP 価格指数が輸出財や輸入財（輸入された中間投入財を含めて）の価格を含んだものになっているのに対して，消費者物価指数は，（消費財，投資財，政府が支出した財は含まれますが，輸出財や輸入財は含まれない）最終財の価格のみを含んだものになっていると考えられます。

ここでの結論は，各国間の実質 GDP は，２つの方法で測ることができるというものです。一つは輸出財や輸入財の価格を含めたもので，生産側あるいは生産水準の尺度とされるものです。もう一つは，輸出や輸入といった貿易財を除いた価格で測るもので，支出側あるいは厚生水準の尺度とされるものです。ペン・ワールド・テーブル（PWT）の目標は，実質 GDP の計測ですが，PWT では「実質 GDP」をどちらの概念でとらえているのでしょうか？　生産側の実質 GDP^o でしょうか，それとも支出側の実質 GDP^e でしょうか？　実は，実質 GDP の測定は，PWT の第７版では支出側の実質 GDP^e に最も近いことがわかっています。この傾向はとくに基準年で強いものになっています。というのも，基準年では，各国の実質 GDP を計算するにあたって，国際比較プロジェクト（ICP：International Comparisons Project）[†] が集めた最終財の価格を使って計算されているからです。ICP は，輸出財や輸入財の価格を含めておらず，消費財，投資財，政府が支出した財の価格だけを含んでいるため，各国間の実質 GDP の支出側の尺度となっています。また，第７版までのそれぞれの版の PWT では，ICP の最も近い基準年を用いて計測し，各国の国民勘定から得られた実質 GDP の成長率を使って実質 GDP を時系列の前や後に外挿していました。

† ICP は，1968年に国連によって始められたもので，現在では，世界銀行や EC 統計局や OECD などの国際組織を含めた共同事業として行われている。定期的に出版物もあり，購買力平価（PPP）に基づいた GDP を計算するうえで，とても重要な指標を作成している。

ただし，PWT の第８版以降は，支出側の実質 GDP^e と生産側の実質 GDP^o の双

方を測定し，複数の基準年から得られる ICP 価格を用いるなどの改善を行っています。Feenstra, Heston, Timmer, and Deng（2009）は，限られた範囲ですが，いくつかの国の結果を議論しているだけでなく，生産側と支出側の実質 GDP の尺度を計算する算式についても述べています。彼らの研究は，実質 GDP^{o} を求めるために，輸出財や輸入財の価格として実際に貿易単価を用いています。この単価は，狭い分類で定義した財の関税課税価格をそれらの数量で割ったものです。こうした単価は，異なる国の輸出財もしくは輸入財で，定義も狭く，品質もばらばらであることから，いろいろと問題があることが知られています。第 9 章で議論したように，品質の問題は， Feenstra and Romalis（2014）の方法を使えば，輸出財や輸入財については転嫁された品質で単価を補正することができます。こうした補正は，Feenstra, Inklaar, and Timmer（2015）で述べられ，第 8 版以降の PWT はこれを採用しています。また，PWT の第 8 版では，実質 GDP^{o} を求めるために輸出財や輸入財の品質で調整した価格を用いているだけでなく，最近の基準年 ICP データを用いたり，複数年の ICP データを用いたりして，経時的な実質 GDP についていろいろな測定を行っています。「次の世代」の PWT に関する詳しい説明は，Feenstra, Inklaar, and Timmer（2015）を参照してください。