EViewsによる応用ファイナンス入門

第6章

実証ファイナンス

- 第6章で利用している次の項目について具体的に解説します。
  - ACDモデル
  - UHF-GARCHモデル
  - 実現ボラティリティ

ボラティリティ

- 収益率のボラティリティについて確認します。収益率の真のモデルを次のように仮定します。

$$R_t = a + b_1 R_{t-1} + \cdots + b_p R_{t-p} + \epsilon_t$$

- 実現値の分かっているt-1時点での条件付き期待値は

$$\mathrm{E}_{t-1}(R_t) = a + b_1 R_{t-1} + \cdots + b_p R_{t-p}$$

よって、

$$(R_t - \mathrm{E}_{t-1}(R_t))^2 = \epsilon_t^2$$

この予測誤差の二乗をリスクと考えることができます

ボラティリティ

- 次に予測誤差の式を次のように書き換えます

$$R_t = \mathrm{E}_{t-1}(R_t) + \epsilon_t$$

- そして予測不可能なショックを次のように定義します

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim \mathrm{i.i.d}, \quad \mathrm{E}(z_t) = 0, \quad \mathrm{Var}(z_t) = 1$$

ここで σ_t^2 をt期における収益率のボラティリティと呼びます

GARCHモデル

- Engle (1982)は収益率のボラティィリティについて次のようなARCHモデルを提案しました

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2$$

- さらにBollerslev (1986)はこれを拡張したGARCHモデルを提案しました

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \epsilon_{t-j}^2$$

$$\omega > 0, \quad \beta_{i,} \alpha_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p; j = 1, 2, \ldots, q$$

ACDモデル

- Engle and Russell (1998)は約定間隔に注目した Autoregressive Conditional Durationモデルを提案しました
- これはGARCHモデルを応用したものです

$$\Psi_i = \omega + \alpha x_{i-1} + \beta \Psi_{i-1}$$
$$x_i = \Psi_i \epsilon_i$$

$$\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta < 1$$

$$\mathrm{E}(\epsilon_i) = 1$$
$$\mathrm{V}(\epsilon_i) = \sigma^2$$

- 撹乱項の期待値が1でない時は、

$$x_i = \mu \Psi_i (\epsilon_i / \mu) = \Psi'_i \epsilon'_i$$

ACDモデル

- ACDモデルにはトレンドを除去したトレンド調整済みの約定間隔を利用します。
- トレンド関数を用いて観測した約定間隔を除します。

$$x_i = \frac{\tau_i}{\phi(t_i)}$$

- トレンド関数には決定版と呼ばれるものはありません。
- 本書では回帰スプラインを利用しました。

$$\phi(t_i) = p_m(t_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - k_i)_+^2$$

ACDモデルの推定

- EViewsによるACDモデルの推定には2つの方法があります。
- 疑似最尤法はEViewsのGARCHモデルの推定機能を利用します。
- 手間いらずですが、GARCHモデル同様、パラメータに制約を掛けることができません。推定値は負になる場合などは対応できません。
- LogLオブジェクトによる最尤法を利用します。
- 尤度関数をコーディングする手間を要しますが、非負条件などを自由に設定できます。

疑似最尤法

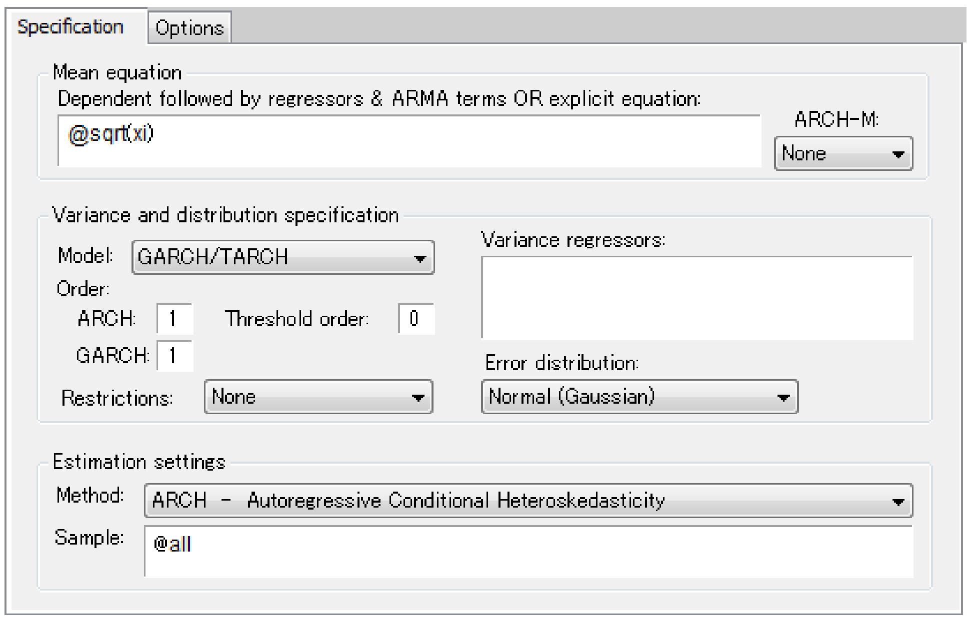
$$\begin{aligned}\Psi_i &= \omega + \alpha x_{i-1} + \beta \Psi_{i-1} \\ x_i &= \Psi_i \epsilon_i\end{aligned}$$

- 最尤法は尤度関数においてϵの分布関数を特定します
- 分布関数の選択に誤りがあれば、一致推定量を得ることはできません
- 疑似最尤法は分布関数の選択に誤りがあっても堅牢な一致推定量を得ることができます

疑似最尤法による推定

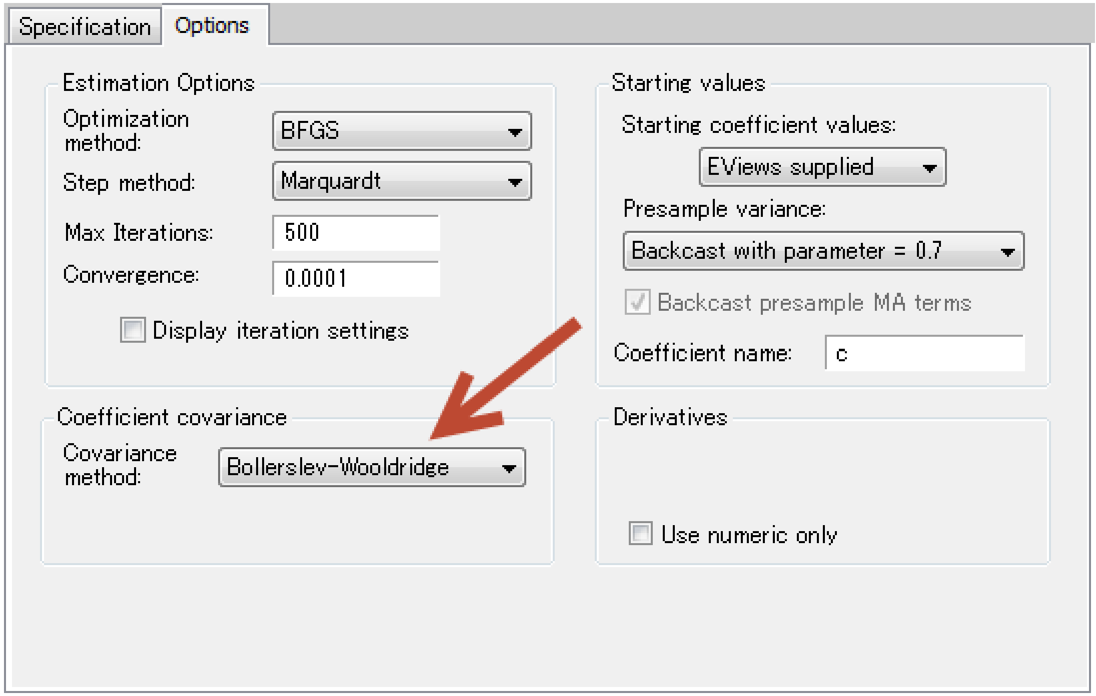
$$\Psi_i = \omega + \alpha x_{i-1} + \beta \Psi_{i-1}$$
$$x_i = \Psi_i \epsilon_i$$

- GARCHモデルのフレームワークがそのまま利用できます。



疑似最尤法による推定

- 標準誤差の計算にはBollerslev-Wooldridgeを選択します



最尤法による推定

ACDモデルの尤度関数を考えます

$$\begin{aligned}\Psi_i &= \omega + \alpha x_{i-1} + \beta \Psi_{i-1} \\ x_i &= \Psi_i \epsilon_i\end{aligned}$$

調整済み約定間隔について

$$\begin{aligned}F_x(x_i) &= \mathrm{P}(X_i \le x_i) = \mathrm{P}(\Psi_i \epsilon_i \le x_i) \\ &= \mathrm{P}\left(\epsilon_i \le \frac{x_i}{\Psi_i}\right) = F_\epsilon\left(\frac{x_i}{\Psi_i}\right)\end{aligned}$$

これを微分して

$$f_x = \frac{d}{dx} F_\epsilon\left(\frac{x_i}{\Psi_i}\right) = f_\epsilon\left(\frac{x_i}{\Psi_i}\right)\Psi_i^{-1}$$

ACDモデルの尤度関数

撹乱項が期待値1の場合の指数分布に従う場合、

$$f_\epsilon = \exp(-\epsilon_i)$$

尤度関数は

$$LL = \sum \log f_\epsilon \left(\frac{x_i}{\Psi_i} \right) \Psi_i^{-1} = \sum \log \left\{ \exp\left(-\frac{x_i}{\Psi_i} \right) \cdot \Psi_i^{-1} \right\}$$

$$= -\sum \left[\frac{x_i}{\Psi_i} + \ln \Psi_i \right]$$

UHF-GARCHモデル

- Engle and Russell (1998)が提案したUHF-GARCHモデルの定義を説明します
- ティックデータのi-1時点からi時点までのリターンをr_iと定義します。その時の条件付き分散は

$$V_{i-1}(r_i|x_i) = h_i$$

- 収益率を約定間隔の平方根で割ったものを瞬間ボラティリティとします。

$$V_{i-1}\left(\frac{r_i}{\sqrt{x_i}}|x_i\right) = \sigma_i^2$$

UHF-GARCHモデル

- これらの定義より、1つのリターンと瞬間収益率のそれぞれのボラティリティの関係は

$$h_i = x_i \sigma_i^2$$

- このように定義した瞬間収益率を用いてGARCHモデルとして推定したものがUHF-GARCHモデルです
- 平均方程式では瞬間収益率の絶対値を被説明変数とします
- 瞬間ボラティリティを被説明変数とする分散方程式では、ボラティリティの変動要因と思われる説明変数を利用します

UHF-GARCHモデルの推定

- 瞬間収益率にも一般的な日中のトレンドが存在します
- ACDモデルと同じ方法で瞬間収益率のトレンドを除去したのち, GARCHモデルの推定機能を用いてモデル推定を実行します

実現ボラティリティ

- Hansen and Lunde (2006)
- 株価の対数値に対して次のような過程を置きます

$$u(t) = p(t) - p^*(t)$$

- アスタリスクの付いた価格は真の価格(効率的な価格)
- p(t)は実際に観測した価格。u(t)はマーケットマイクロストラクチャノイズです
- この時、効率的な価格とボラティリティは次のような関係を満たすものと仮定します

$$dp^*(t) = \sigma(t)dw(t)$$

Integrated Variance

- 以上のような設定の下で取引時間[a,b]におけるIntegrated Varianceを次のように定義します

$$\mathrm{IV} \quad = \int_a^b \sigma^2(t)dt$$

- 次は具体的なボラティィリティの定式化について考えます
- 最初にイントラデイリターンを次のように定義します。一日の取引時間をm個の区間に分けて考えます。

$$y^*_{i,m} \; = \; p^*(t_{i,m}) - p^*(t_{i-1,m}) \quad 1 \le i \le m$$

$$y_{i,m} \; = \; p(t_{i,m}) - p(t_{i-1,m}) \quad 1 \le i \le m$$

Integrated Variance

- ノイズの階差については

$$e_{i,m} = u(t_{i,m}) - u(t_{i-1,m})$$

- 観測可能な収益率を分解すると、

$$y_{i,m} = y^*_{i,m} + e_{i,m}$$

- i番目の区間におけるIVは

$$\sigma^2_{i,m} = \int_{t_{i-1},m}^{t_{i,m}} \sigma^2(s)ds$$

実現ボラティリティ

- 潜在的な価格過程においてmが無限大に近づくとき、次式はIVの一致推定量になります

$$RV_{*}^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} y_{i,m}^{*2}$$

- しかし、次に示す観測可能な仲値によるRVはマーケットマイクロストラチャノイズの影響で一致性を持たないことが分かっています

$$RV^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} y_{i,m}^{2}$$

実現ボラティリティ

- Andersen et al. (2000b)はボラティリティシグネチャプロットを利用して適切なサンプリング間隔を調べる方法を提案しています
- 20分程度のサンプリング間隔を採用しているケースが多くあります