第 5 章　金融商品の設計:仕組債とポートフォリオ保険

5.1　はじめに

第 4 章では確率微分方程式とそれにもとづくブラック＝ショールズモデルについて学びました。この章ではブラック＝ショールズモデルを用いて何ができるかを、1)金融商品の設計、2)ポートフォリオ保険、の 2 つの分野を例にあげて、考えてみます。また実際のデータと EViews を用いて、その有効性や問題点をさぐることにします。

5.2.　危ない金融商品：日経平均リンク債の設計

マクドナルドのハンバーガーは、牛肉とバンズ(パン)と野菜(レタスとピクルス)を調理して作ったものです。金融商品も同じことです。例えば株式投資信託(株式投信)はいろいろな株式を組み合わせたポートフォリオです。日経平均指数投信は日経平均株価指数を構成する 225 の株式からの配当や値上がり(値下がり)にその価値や分配金が連動します。日経平均を持っているのとほとんど同じことです。多くの投資家にとっては、指数を構成する 225 社の株をすべて購入することは難しいのですが、こうした指数投信であれば、少ない金額で分散投資をしてリスクを減らすことができます。

投資信託を構成する資産は、上場株式にとどまらず、いろいろなものがあります。日本国債や企業が発行する債券(社債)、外国の国債や社債や株式、様々は商品(農産物、貴金属、石油やガスなど)などが典型的なものです。その他、地震、台風、人の生き死に、CO2 排出権、ボラティリティなどに投資をしている投資信託やファンドもあります。ここでは、日経平均指数に満期時の額面支払が連動しますが、金利(クーポン)が国債に比べて高い「日経平均リンク(連動)債券」について、その設計と実際のデータを用いた分析を通じて、なぜ高いリターンの背後に高いリスクが潜んでいるかを明らかにします。

5.1.1　日経平均リンク(連動)債券を設計する

1993 年関東地方のある農業共同組合は日経平均リンク債投資の失敗により 130 億円の経常損失を計上しました。組合員がためてきた 150 億円の積立金(株式会社でいう資本金)を取り崩して損失を補填したとのことです(1993 年日経新聞夕刊)。2010 年、西日本のある大学が日経平均リンク債投資に失敗をし、少なくも 58 億円の含み損を抱えていることが報じられました(日経新聞、2010 年 12 月 8 日夕刊)。こうした「日経平均リンク債」という金融商品への投資問題が繰り返し生じています。

日経平均リンク債は国債などに比べ高い利子(クーポン)を約束しますが、満期時の額面償還額がその時の日経平均にリンク(連動)して減少する可能性のある金融商品です。日経平均リンク債は、1) 毎期一定の利子を確実に支払う国債(の買い)と 2) 日経平均を原資産とする日経平均プットオプションの売りから成るポートフォリオです。そのことがわかればこう

した仕組み債のカラクリも容易に解明できます。なぜリスクをよく理解できない投資家にとってリンク債が魅力的であるのか、高い利子の受取は結局自分の財布からだしたものであるというカラクリを、日経平均リンク債を自分で作成して解き明かすことにします。

日経平均リンク債の満期ペイオフ： 次のような簡単な日経平均リンク債概を考えてみましょう。1)発行価格は 1 株 100 円、2)運用期間は $T=2$ 年、3) 年 1 回、額面 100 円に対し 3 パーセント！もの高い利子を 2 年間払います。現在の日経平均が $S_0=15,000$ 円しているものの、4) 2 年後の額面償還は、2 年後の日経平均が 14,000 円以上であれば満額 100 円ですが、14,000 円を下回るとそれに連動(Link して)して値下がりします。最悪、日経平均がゼロ(日本が破綻する！こと)になれば 100 円の償還額もゼロになります。

このような日経平均リンク債の 2 年後の額面償還額が図 5.1 に示されています。この図から、日経平均リンク債の額面償還額(図 5.1)を示す折れ線は、1)「2 年目に 100 円を支払う割引債の買い」と「行使価格 K=15,000 円の日経平均プットオプションの $100円/K円=100円/14,000円$ 単位の売り」からなるポートフォリオの 2 年後のキャシュフローとして表現できます。その導出は一見すると難しいように思えますが、2 つの変数の最大値と最小値を求める演算子 $Max[\bullet,\bullet]$ と $Min[\bullet,\bullet]$ を用いれば簡単で。これらの演算子の意味をまず理解することにしましょう。

2 つの変数 x と y （確率変数でも定数であってもよい)があったとき、$Max[x,y]$ は x と y の大きい方を示す関数です。例えば、$x=5$ と $y=2$ であれば $Max[5,2]=5$ です。同様にして $Min[x,y]$ は x と y の小さい方を示す関数ですので $Min[5,2]=2$ となります。この Max と Min に関して次の 2 つの公式が成立します。

公式 1： $Max\left[x,y\right]=x+Max\left[0,y-x\right]$ 　　 $Min\left[x,y\right]=x+Min\left[0,y-x\right]$

公式 2：

正の定数 $k>0$ に対して $k\cdot Max\left[x,y\right]=Max\left[kx,ky\right],\quad k\cdot Min\left[x,y\right]=Min\left[kx,ky\right]$

負の定数 $k<0$ に対して $k\cdot Max\left[x,y\right]=Min\left[kx,ky\right],\quad k\cdot Min\left[x,y\right]=Max\left[kx,ky\right]$

例えば、公式 1 で $Min[5,2]=2+Max[0,2-5]=2+0=2$ となり、公式 2 において $k=-1$ とした時に、$-1\times Min\left[5,2\right]=Max\left[-5,-2\right]=-2$ となることを確かめましょう。

こうした点を念頭におくと、図 5.1 の折れ線を次のような数式で表すことができます。

$$\tilde{P}_T=\begin{cases}100 & if\ \ \tilde{S}_T\geq K\\ \left(\dfrac{100}{K}\right)\tilde{S}_T & if\ \ \tilde{S}_T<K\end{cases}\tag{4.1}$$

ここで、S_T は不確実な T=2 年後の日経平均株価指数の値を示し、額面償還額が 100 円を下回る点、トリガー価格は K=14,000 円です。2 年後の日経平均株価指数が、14,000 円以上であれば、この日経平均リンク債は額面 100 円を、通常の国債と同様、額面金額だけ償還(返済)します。しかし 2 年後の日経平均株価指数 h が 14,000 円以下になったときの額面償還

額は、その時の日経平均S_2に連動した金額になります。日経平均に連動する度合い(直線の傾き)は$100/K$です。連動係数$100/K$は、図の中の直角三角形⊿の底辺がK、高さが 100 ですから、その傾きとして計算できます。

更に式(4.1)を 1 つの式で表すことができれば便利です。公式 1 と公式 2 を用いると結果は次のようになります。

$$
\begin{aligned}
P_T &= Min\left[100,\ \left(\frac{100}{K}\right)\tilde{S}_T\right] \\
&= 100 + Min\left[0,\ \left(\frac{100}{K}\right)\tilde{S}_T - 100\right] \\
&= 100 + \left(\frac{100}{K}\right)Min\left[0,\ \tilde{S}_T - \left(\frac{K}{100}\right)100\right] \\
&= 100 - \left(\frac{100}{K}\right)Max\left[0,\ K - \tilde{S}_T\right]
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

最後の式の右辺第 2 項$Max\left[0,\ K - S_T\right]$は原資産を$S_T$として、行使価格が K 円のヨーロピアン・プットオプションの満期 T のペイオフP_Tを表していることになります。

日経平均リンク債のプライシング： 最大限可能な利子支払額 C と行使価格 K の決定：

この日経平均リンク債のプライシングは、1)毎年 1 回、最大幾らの利子 C 円を払えるのか、あるいは 2)2 年後の償還額が額面 100 円を下回るような事態を引き起こす日経平均価格(トリガー価格 K とか行使価格 K と呼ぶ)を幾らにするかに相当します。なぜならばこうした仕組み債は、通常の債券と同様に発行時の価格を 100 円にするからです(パー発行)。このリンク債から受け取ることができるお金は、1)毎年 C 円の利子 2 年間、2)2 年後の日経平均にリンクした額面償還額です。結局、100 円の発行価格は、1)毎年 1 回支払う C 円の利子の現在価値と、2)不確実な額面償還額の期待現在価値の合計として、次のように表現できます。

$$
\begin{aligned}
100\text{円} &= \boxed{\frac{C\text{円}}{1+r} + \frac{C\text{円}}{(1+r)^2}} + \boxed{\frac{1}{(1+r)^2}\left(100 - \left(\frac{100}{K}\right)E\left[Max\left[0,\ K - \tilde{S}_T\right]\right]\right)} \\
&= \boxed{\frac{C}{1+r} + \frac{C+100}{(1+r)^2}} - \left(\frac{100}{K}\right)P_0\left(S_0, K, T, r, \sigma\right) \\
&= \boxed{\frac{C}{1+r} + \frac{C+100}{(1+r)^2}} - \left(\frac{100}{K}\right)\left(-S_0 N\left(-d_1\right) + Ke^{-r_F T} N\left(-d_2\right)\right)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

式(4.3)の 1 行目の右辺第 1 項は毎年 1 回、確実に C 円を支払う国債の現在価値(理論価格)を表し、2 行目の$-(100/K)E[Max[0,\ K - S_T]]$は原資産が日経 225 株価指数で、行使価格

が K、残存期間(満期)が 2 年のヨーロピアン・プットオプションを$100/K$単位(マイナス記号がついているので「売った(ショート・ポジション)」ことからの 2 年後の期待損益を表しています。2 行目の右辺第 1 項は年 1 回利払いの 2 年ものクーポン債の現在価値を示しています。右辺第 2 項の$P_0(S_0,K,T,r,\sigma)$は、現在S_0円している日経平均を原資産とし、行使価格を K円、満期 T年、年当たりリスクフリーレートをrパーセント、日経平均収益率の年あたりボラティリティ(標準偏差)をσパーセント、としたときのヨーロピアン・プットオプション価格を示しています。もし日経平均 225 株価指数が対数正規分布（その収益率が正規分布）していれば、その値はブラック＝ショールズ式を用いて計算することができます。第 4 章の式(4.14)のブラック＝ショールズのプットオプション式を代入すると 3 行目のようになります。

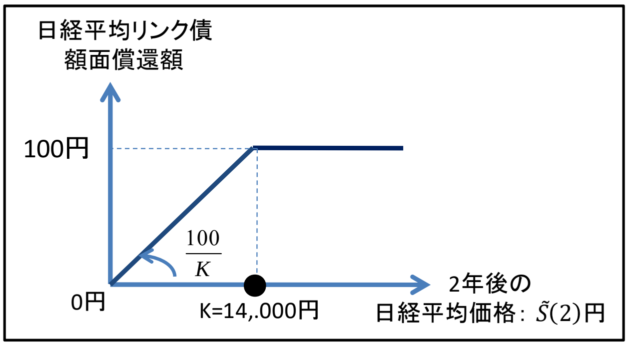


図 5.1　日経平均リンク債の満期損益

注)満期 2 年の日経平均リンク債の額面償還額(行使価格が 14,000 円の日経平均プットオプションの、$100/K$単位の「売り」から満期ペイオフを示しています、現在の日経平均価格は,15,000 円とします)

4.2.2　数値例　式(4. 3)は一本の方程式からなるので、未知数であるクーポン金額 C円、あるいは行使(トリガー)価格 Kの一方を決めれば、この日経平均リンク債の価格 100 円を満足する他方の値を決めることができます。いま行使(トリガー)価格 Kを 14, 000 円とし、最大利子支払額 C が幾らに成るかを計算してみましょう。日経平均価格を 15, 000 円、日経 225 の(価格変化率の)ボラティリティをσ=0. 2=20 パーセント、リスクフリーレートrを 3 パーセント、オプションの残存期間 T=2 年とすれば、ブラック=ショールズモデルによる日経平均プットオプション$P_0\left(S_0,K,T,r,\sigma\right)$の理論価格は 1055. 22 円になります。これらの値を式(4. 3)に代入すると、

$$100\text{円}=\frac{C^*}{1+0.01}+\frac{C^*+100}{(1+0.01)^2}-\left(\frac{100}{14{,}000}\right)1055.22 \qquad (4.\ 4)$$

となり、この式を満足する利子支払額C^*は約 4.8253 円になります。これに対し、当初約

束した利子は年当たり 3 円です。差額 1.8253 円はどこに行ってしまったのでしょうか？差額の一部はこの商品の組成費用、例えばこの商品を販売した人への手数料、商品を作った金融エンジニアへの報酬、商品の「原料」となる国債や日経平均オプションを購入するための手数料など費用、購入できない場合はそれを複製する(具体的な方法は 5.3 節を参照してください)ための費用、また日経平均が 14,000 円以上になるリスクをヘッジする費用にあてます。そうして残ったものは、勿論この商品を販売する会社の利益になります。でもよく考えて見ましょう。最大クーポン支払額円はどこからきたのでしょうか？　実はこの日経平均リンク債を「買った」人が、それとは知らずに実際には「売った」日経平均プットオプション料から来ているのです。自分の財布からでたお金の一部を得て「もうかった！」と思っているわけです。

同じ満期の国債の利子が年あたり 1 円にも届かないときに、その 3 倍の利子が得られると「錯覚」しているのです。当然、日経平均が 2 年後に値下がりし 14,000 円になったら、当初の見込んだ 100 円の償還額は減ってしまいます。

5.2.3　最低保証付き日経平均リンク債

図 5.1 では、日経平均がゼロになると、つまり日本が破綻すると、この仕組み債の額面支払はゼロ、つまりこの債券は紙くずになってしまいます。

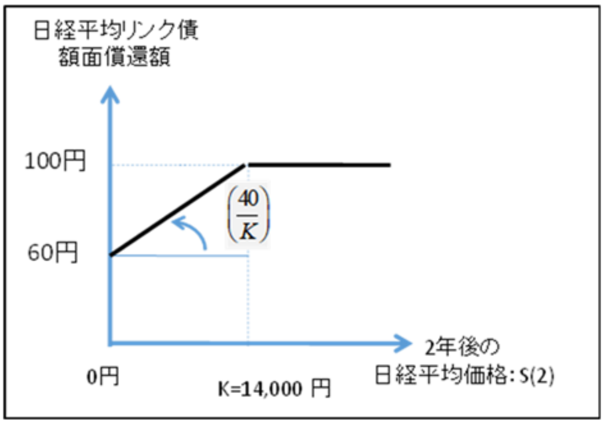


図 5.2　最低保証のある日経平均リンク債の額面償還額

それでは余りにも酷であるので、図 5.2 のように最低でも額面支払が 60 円になるような商品を設計してみましょう。どのようにモデルを変えたら良いでしょうか？　一見すると難しく思えますが、見かけほど難しくはありません。額面支払額の減り具合は直線の傾きで、最低保証額はその Y 切片で表せたことを思い出してください。額面償還額を表す式は、式(4.1)から次の式(4.5)のように変わります。

$$P_T = \begin{cases} 100 & if\ \tilde{S}_T > K \\ 60 + \left(\dfrac{40}{K}\right)\tilde{S}_T & if\ \tilde{S}_T \le K \end{cases} \tag{4.5}$$

したがって T=2 年後におけるこの仕組み債の額面支払額は式(4.2)から、公式 1 と公式 2 を用いると、次の式(4.6)のようになります。

$$\begin{aligned} P_T &= Min\left[100,\ 60 + \left(\frac{40}{K}\right)\tilde{S}_T\right] = 100 + Min\left[0,\ -40 + \left(\frac{40}{K}\right)\tilde{S}_T\right] \\ &= 100 + \left(\frac{40}{K}\right)Min\left[0,\ -40\left(\frac{K}{40}\right) + \tilde{S}_T\right] = 100 + \left(\frac{40}{K}\right)Min\left[0, -K + \tilde{S}_T\right] \\ &= 100 - \left(\frac{40}{K}\right)Max\left[0,\ K - \tilde{S}_T\right] \end{aligned} \tag{4.6}$$

この結果を式(4.2)比べると、右辺の $Max[0,\ S_T - K]$ に掛かる定数が式(4.2)では $100/K$ であったのが $40/K$ に変わっただけであることがわかります。最低保証額を $M(=60\text{円}<100\text{円})$ とすれば、式(4.6)を一般的に表現すると次のようになります。

$$P_T = Min\left[100,\ M + \left(\frac{100-M}{K}\right)\tilde{S}_T\right] = 100 - \left(\frac{100-M}{K}\right)Max\left[0,\ K - \tilde{S}_T\right] \tag{4.7}$$

残存期間 N 年間、年 1 回利払いの仕組債の原資産にリンクする元本の将来の不確実な値は、式(4.3)を書き換えて、

$$\begin{aligned} 100\text{円} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{C^*\text{円}}{(1+r)^n} + \boxed{\frac{1}{(1+r)^N}\left(100 - \left(\frac{100-M}{K}\right)E\left[Max\left[0,\ K - \tilde{S}_T\right]\right]\right)} \\ &= C^*\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(1+r)^n} + \frac{100}{(1+r)^N} - \left(\frac{100-M}{K}\right)P_0(S_0, K, T, r, \sigma) \end{aligned} \tag{4.8}$$

最後の式の右辺第 1 項の $\sum_n 1/(1+r)^n$ は年 1 回 1 円を N 年間支払う年金の現在価値、つまり年金原価係数に当たります。これは EViews では関数@pv(r,N,1)として計算できるので、この式を未知数 C に関して解くと、

$$C^* = \frac{100 - \dfrac{100}{(1+r)^N} + \left(\dfrac{100-M}{K}\right)P_0(S_0, K, T, r, \sigma)}{@\,pv(r, N, 1)} \tag{4.9}$$

この式に従って、仕組債の価格決定、この場合は仕組債の支払いクーポン額を決めることにします。

5.2.4 EViews による日経平均リンク債の設計と運用シミュレーション

表 5.1 は、図 5.2 に示された「最低保証」のある場合の日経平均リンク債の価格分析を式(4.9)にもとづいて行うための EViews のプログラムです。詳しいコメント(網掛けをした部分)をつけてあるのでその概要は理解できると思いますが、念のため順を追ってその内容を簡単に説明しましょう。

行番号 2 は第 4 章の図 4.8 で示したブラック＝ショールズ・モデルを計算するサブルーチンをこの仕組債プログラムで利用することを最初に宣言しています。

行番号 4 から 9 までにはブラック・ショールズ・モデルを計算するための 6 つのパラメータを与えています。行使価格 K=14,000 円、現在の日経平均価格 S_0=15,000 円、日経 225 の(価格変化率の)年あたりボラティリティを σ =0.2=20 パーセント、年あたりリスクフリーレート r =3 パーセント、オプションの残存期間 T=2 年、配当利回りを q＝０パーセントとしています。

行番号 11 でこの仕組債の満期の最低額面保証額を M=60 円としました。行番号 12 はプット価格をゼロ円とおいています。これは行番号 14 で示すブラック=ショールズモデル・サブルーチンの引数はすべて単一の数値(スカラー)でなければいけないので、ここで変数の型をスカラーと定義し、その初期値を便宜的にゼロとおいています。

表 5.1 仕組債の設計(式(4.9)による最大支払いクーポン額の決定) (05_02_StrBond.prg)

```
0  ' 表5.1仕組債の設計(式(5.9)による最大支払いクーポン額の決定)(05_02_StrBond.prg)
1  ' BSモデルの計算のためのサブプーチンを読み込む
2  include BS_Model
3  ' BSモデルにあたえるパラメータを与える
4  scalar S0 = 15000
5  scalar K = 14000
6  scalar T = 2
7  scalar sigma = 0.2
8  scalar r = 0.01
9  scalar q = 0
10 ' 最低保証額M<100円を与える
11 scalar M = 60
12 scalar Put_price = 0
13 ' BS プットオプション価値を計算
14 call BS_Model(sigma, Put_price, S0, K, r, T, q, "Put")
15 scalar put = ( (100-M) / K ) * Put_price
16 scalar dbond = 100 / ( 1 + r )^T
17 ' 年金現価係数の計算(系列dummyに格納)
18 series dummy = @pv( 0.01, 2, 1 )
19 scalar pvan =dummy(1)
20 ' クーポン支払額の最高値を計算
```

行番号 14 でプットオプション価値を計算します。このサブルーチンからの計算結果 Put_price=1055.215 円になりました。行番号 15 では式(4.8)の右辺の最後の項を計算しています。結果は Put=3.0149 円となっています。行番号 16 は式(4.8)の右辺第 2 項、つまり通常の割引債価格を計算し、その結果は dbond=98.03 円でした。行番号 18 と 19 はリスクフリーレートが 3%、残存期間 2 年、毎年 1 回利払いで、その時のキャッシュフローが 1 円の年金原価係数を EViews の関数を用いて計算しています。式(4.9)の分母 $@pv(r, N, 1)$ を計算していますが、その計算結果は系列(series)属性を持つため、行番号 19 でそれをスカラー値に変換しています。結果は@pv(0.01,2,1)=pvan=1.9704 円となりました。これらの計算結果を用いて式(4.9)にもとづき最大クーポン支払額を行番号 21 で計算しています。C*=Coupon=2.53 円となりました。

この計算結果は、この仕組債はお買い得だということになります。なぜならば、理論的なクーポン(利子)の支払額は毎年 2.53 円なのに、契約上のクーポン支払額はそれ以上の 3 円もらえることになっているからです。でも実際の世界ではこうしたことはありえません。なぜなら、仕組債の売手は、こうしたモデルによって、損をしない実際のクーポン支払額をきめているからです。

このプログラムを用いて、実際の日経平均リンク債の価格分析を行ってみてください。また、行使価格 K や最低保証額 M、無リスク金利 r、ボラティリティ σ などをいろいろ変

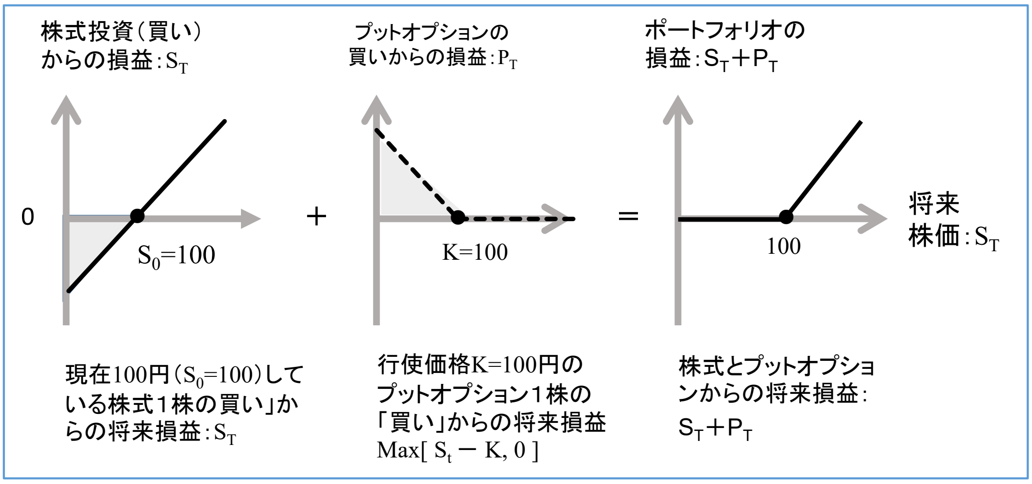
えて、最大支払可能クーポンがどのように変化するのかを試してみてください。

5.3　オプション価格決定理論にもとづくポートフォリオ保険(OBPI: Option Based Portfolio Insurance)

多くの投資家に危険資産、例えば株に投資をしたときの「リスク」とは何かを質問すると、株価変動(ボラティリティやベータ)をリスクと考えるよりも「値下がり」することがリスクであると答える人が多いのです。値下がりリスク、これをファイナンスでは「ダウンサイドリスク(Down side risk)」と呼びますが、これを回避する方法としてのポートフォリオ保険の仕組みと EViews による実装を考えることにしましょう。

5.3.1　プロテクティブ・プット：市場で売買が行われているオプションに基づく保険

株式の値下がりリスクを保証してくれる保険を販売している保険会社はありません。しかしそれと同様な働きをするのが株式の「プットオプション」です。図 5.3 は「プロテクティブ・プット(PP: Protective Put)」と呼ぶオプションを用いた値下がりリスク回避戦略を示しています。これにそって、なぜプットオプションが株式の値下がりリスクに対する保険になっているかを説明しましょう。



現在 100 円している株式の値下がりリスクを回避するために行使価格 100 円のプットオプションを 1 株買う。

図 5.3　プロテクティブ・プット: オプションを用いた株価値下がりを回避する

図 5.3 には 3 つのグラフがありますが、いずれも横軸は現在 100 円している株式の将来、例えば 1 年後の株価 $S_T = S_1$ を示しています。図 5.3 の左の図で右上がりの 45 度線は、現在 100 円している株式の 1 年後の値上がり益と値下がり損、つまり $\tilde{S}_1 - S_0 = \tilde{S}_1 - 100$ を示しています。ある投資家が 1 年後の株価 $\tilde{S}_1$ が 100 円より値下がったときの損失を回避したいと考えているとしましょう。どのようにしたらよいでしょうか。「価値の下がったものを高く相手に押売する(プットする)権利」である「プットオプション＝保険」を 1 株購入すれば良いのです。行使価格 K=100 円のプットオプションを 1 株保有していれば、1 年後の株

価が行使価格 100 円以下になったときには、安くなった株を 100 円で相手に押売(プット)することができます。100 円より高くなったときには権利を行使せず、高くなった株式を保有すれば良いのです。これを式で書くと次のようになります。プットオプションを 1 株保有していることからの利益は $P_1 = Max\left[K - \tilde{S}_1, 0\right]$ となります。例えば株価が 90 円に値下がりすると 100－90＝10 円の損失が発生しますが、プットオプション 1 株からの利益は $P_1 = Max[100-90,0] = Max[10,0] = 10$ 円となります。つまり株式からの損失をプットオプションからの利益で相殺でき、損も益も発生しません。ポートフォリオ全体の価値 100 円は株価が変動する前の 100 円に等しいことになります。

図 5.3 の一番左が現物株 1 株を持っていたときの利益と損失を表していますが、影をつけた逆三角形の部分が損失を表しています。図 5.3 の真ん中の図は株価が下がったときプットオプションを 1 株からの利益(影をつけた三角形)を示していいます。図 5.3 の一番右の図は最初の 2 つの図をあわせたもの、つまり株式 1 株の「保有」に対しプットオプションを 1 株「保有」したポートフォリオからの損益を表しています。株価の値下がりを回避するための保険はその株式を原資産とし、保証額を行使価格とし、保証期間を満期とするプットオプションになっていることがわかるでしょう。要は株価の値下がりリスクを回避するためにはオプション市場でプットオプションを購入すれば良いのです。

5.3.2　プロテクティブ・プットを合成するポートフォリオ保険

しかしこうしたことが常に日本の株式市場で可能であるわけではありません。日本株を対象にする個別株オプション市場でその取引が活発なのは日経 225 や TOPIX 株価指数のオプションにとどまっています。200 余りの個別企業のオプション(上場有価証券オプション、愛称「株オプション」)が上場されていますが、毎日取引が行われ値段がつくものはそのうちでごくわずかです。

したがって個別企業の株式に対する保険をオプション市場で買うことはほとんど不可能です。また株価指数を対象にするオプションであっても現在の株価からかなり離れた行使価格、あるいは満期が 2 年以上になる長期のオプションの取引はわずかです。ではどうすればよいのでしょうか？　答えは自分で保険を作ればよいのです。これを保険学の用語で言えば「自家保険(Homemade insurance)を作ることになります。その考え方を以下に説明することにします。

図 5.3 で示した株式とプットオプションからなるポートフォリオの<u>現在時点の価値</u>は幾らになるでしょうか？　株式の現在の価値は S_0 円、プットオプションの現在の価値は P_0 円であるので、それぞれを 1 株ずつ購入したときの現在時点(t=0)での価値はその合計の $S_0 + P_0$ となります。もしプットオプションの現在時点のあるべき価格(理論価格)が式(4.10)のブラックショールズのプットオプション公式で表すことができれば、ポートフォリオを価値は次のように表すことができるはずです。

$$\begin{aligned} S_0 + P_0 &= S_0 + Ke^{-rT}N\left(-d_2\right) - S_0N\left(-d_1\right) \\ &= Ke^{-rT}N\left(-d_2\right) + \left(S_0\left(1 - N\left(-d_1\right)\right)\right) \qquad (4.11) \\ &= Ke^{-rT}N\left(-d_2\right) + S_0N\left(d_1\right) \end{aligned}$$

この式(4.11)の最後の式$Ke^{-rT}N(-d_2)+S_0N(d_1)$が何を意味しているか考えてみましょう。最初の項$Ke^{-rT}N(-d_2)$は図 5.4 に示されているように、現在時点で$Ke^{-rT}$円していますがT 年後に K 円を確実に払う割引債を$N(-d_2)$「株」買ったときの価値、言い換えれば割引債の購入「金額」を表しています。割引債とは、満期に額面金額 K 円の返済が行われますが、それ以前には利子を払わない債券です。日本国債についても利子を払うクーポン債の利子(クーポン)部分と元本部分を分離(Strip)したものが割引国債として市場で取引されています。

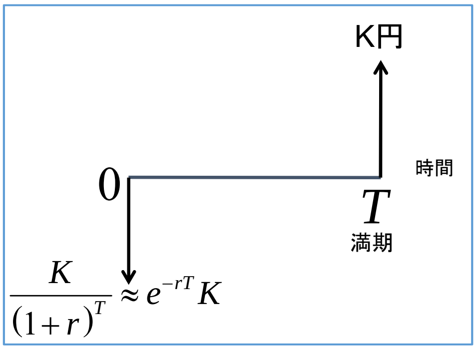


図 5.4　T 年後に K 円を確実に支払う割引債の現在時点の価値(現在価値)＝価格

$N(-d_2)$は T 年後の株価S_Tが行使価格Kより低くなる(リスク中立世界における)確率を意味しています(このことについては第 4 章の 4.5 節で学びました)。その単位は確率なのでパーセントなのですが、これを株数と読み替えることにします。確率なので株数ではありますが、それはゼロと 1 の間の値をとります。

右辺の第 2 項$S_0N(d_1)$も同様に解釈できます。つまり第 2 項は現在S_0円している株式を$N(d_1)$だけ購入したときの金額を表しています。

言い換えれば、株式 1 株の「買い」とプットオプション 1 株の「売り」からなるポートフォリオ(プロテクティブ・プット)は、安全資産である割引債と危険資産である株式からなるポートによって合成(模倣)できるということになります。ポートフォリオ・インシュランスとは、式(4.11)の左辺で表される危険資産投資を保険(プット)でリスク回避する投資戦略を、危険資産そのものと安全資産で再現しようとするものです。具体的には、この戦略の満期までのすべての時点で、株式と安全資産からなるポートフォリオを再構築(リバランス)していけば、投資期間の最終時点(オプション満期)でポートフォリオ価値は最初に決めた最低保証額(行使価格)Kを割るようなことはありません。ではヘッジ比率とは何かを次に考えてみましょう。

ヘッジ比率：式(4.11)で時間を表す添え字をゼロから満期 T までの任意の時点$0 \le t \le T$として、危険資産への投資額を$S_tN\left(d_{1,t}\right)$を式(4.11)、つまりポート価値で割った比率をwとしましょう。つまりw_tと$1-w_t$を次のように定義します。

投資(ヘッジ)比率

$$w_t \equiv \frac{S_t N\left(d_{1,t}\right)}{S_t + P_t} = \frac{S_t N\left(d_{1,t}\right)}{Ke^{-r(T-t)} N\left(-d_{2,t}\right) + S_t N\left(d_{1,t}\right)},$$
$$1 - w_t = \frac{Ke^{-r(T-t)} N\left(-d_{2,t}\right)}{S_t + P_t} = \frac{Ke^{-r(T-t)} N\left(-d_{2,t}\right)}{Ke^{-r(T-t)} N\left(-d_{2,t}\right) + S_t N\left(d_{1,t}\right)_t} \tag{4.12}$$

w_t は株とプットオプションからなるポートフォリオのうちで株式(リスク資産)への投資比率と、$1-w_t$ は無リスク資産への投資比率と解釈できます。この比率を計算する場合、分母第 2 項のプットオプション価値は市場価格を用いることができないので、第 4 章の式(4.14)で計算した理論価格を用いることにします。

5.3.3　計算過程(アルゴリズム)

以上で説明した考え方の計算手順の概略を図 5.5 に示しました。繰り返しになりますが、どのようにして特定のオプション価格決定モデル、この場合はブラック＝ショールズのプットオプション価格モデルによってポートフォリオ保険運用が行われるかを説明しましょう。

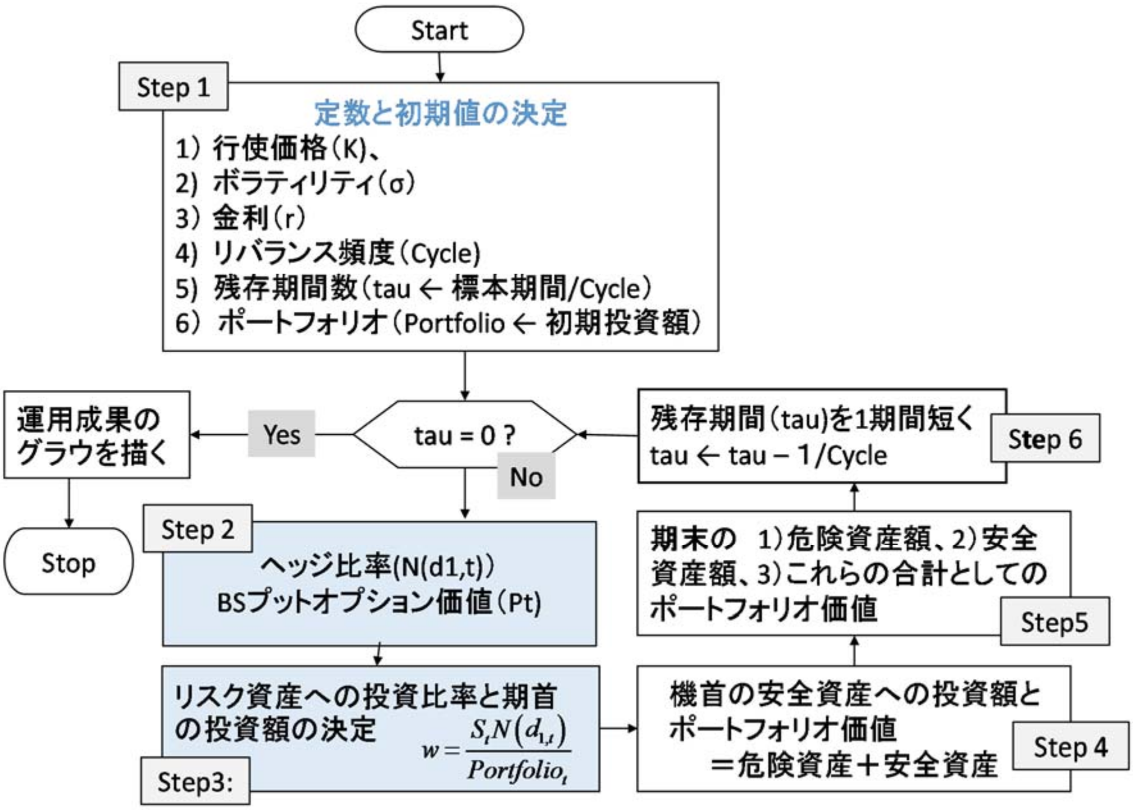


図 5.5　 オプション価格にもとづくポートフォリオ保険の計算過程

Step I:　定数と初期値を与える。ブラック＝ショールズのプットオプション価値とリスク

資産比率を計算するに当たって全期間で一定の値をとる定数と繰り返し計算のための初期値をここで与えます。具体的には、1) 保証金額に当たる行使価格 K 、2) 危険資産(この場合は日経 225 株価指数)の変動の大きさを示す日経 225 株価指数収益率の標準偏差(ボラティリティ) σ 、3) 金利(リスクフリーレート) r 、4) 年あたりリバランス頻度(この場合は 1 週間に 1 回であるので 1 年あたり 52 週) $Cycle$ 、5)年単位の残存期間数 ($tau(\tau)=$ 標本数 $/Cycle$)、6) 初期ポート価値 $Portfolio(1)$ ←初期投資額

Step 2: 保険(プットオプション)価値 P_t の計算。ブラック＝ショールズ。プットオプション

公式とヘッジ比率を計算するために毎期次の計算を行います。

$$d_{1,t} \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right),\quad d_{2,t}=d_{1,t}-\sigma\sqrt{\tau},\quad N\left(d_{1,t}\right),\quad N\left(d_{2,t}\right)$$

$$P_t = -S_t N\left(-d_{1,t}\right)+Ke^{-r\tau}N\left(-d_{2,t}\right)$$

この事例では危険資産は日経 225 株価指数値です。

Step 2: 危険資産投資比率の計算。これから、リスク資産投資比率=(株価×ヘッジ比率)/ポート価値、つまり

$$w_t \equiv \frac{S_t N\left(d_{1,t}\right)}{S_t+P_t} \tag{4.13}$$

を計算します。

Step 3 : 期首の価値計算。期首(週の初め)の危険資産投資額 $RiskyAsset(t)$ は、期首のポートフォリオ価値 $Portfolio(t)$ に危険資産投資比率 $w(t)$ を掛けて次のように計算します。

$$RiskyAsset(t)=w(t)\times Portfolio(t)$$

Step 4: 安全資産投資額の決定、期首の安全資産投資額 $RiskfreeAsset(t)$ は期首のポートフォリオ価値 $Portfolio(t)$ から上で計算した機首の危険資産額 $RiskyAsset(t)$ を差し引いたものとして計算します。

$$RiskfreeAsset(t)=Portfolio(t)-RiskyAsset(t)$$

Step 5 : 期末のポート価値の計算。期末の、つまり 1 期間(1 週間)後の危険資産額 $RiskyAsset(t+1)$ と安全資産額 $RiskfreeAsset(t+1)$ は、それぞれの期首の値に週次の株式投資収益率 $ror(t)$ と週あたりのリスクフリーレート $(1+r_t/Cycle)$ を掛けて求めることができます。また期末のポートフォリオ価値 $Potfolio(t+1)$ はこれら 2 つの合計となります。

$$RiskyAsset(t+1)=ror(t)\times RiskyAsset(t)$$
$$RiskfreeAsset(t+1)=(1+r_t/Cycle)\times RiskyfreeAsset(t)$$
$$Potfolio(t+1)=RiskyAsset(t+1)+RiskfreeAsset(t+1)$$

Step 6: 満期までの繰り返し計算と結果の出力。残存年数を 1 期間減らし

($tau \leftarrow tau - 1/Cycle$)、残存年数がゼロになるまで上の Step2 から Step5 までの計算を繰り返します。すべての計算が終わったならば、ポートフォリオ保険をかけたポートフォリオとかけていないポートフォリオ価値の時系列グラフ、危険資産投資比率などの時系列棒グラフ、それらのヒストグラムなどを描いて、これらの結果から何が言えるかを考えてみます。

4.7.3 EViews によるプログラミングと計算結果

上で説明したような計算は**表 5.2** で示した EViews プログラムによって実行できます。このプログラムでは次のような条件のもとでのポートフォリオ保険運用を試みています。1) 対象となる危険資産として 2011 年度の日経 225 株価指数。2) 保険として合成すべきプットオプションの行使価格=1 万円、3)日経 225 株価指数から計算した年あたり投資収益率 σ =0.2=20 パーセント、4) リスクフリーレート r=1 パーセン=0.01、5) 保険(投資)期間が T=1 年、6) ポートフォリオの改定は 1 週間ごと、つまり年あたり Cycle=52 回(週)、7) 初期投資額 Intfund=1 万円としました。

この結果、ポートフォリオ保険(PI)をかけたファンド(Fund with PI)の運用成果と保険を掛けないですべてを危険資産(日経 225 株価指数)で運用したとき(買い持ち(Buy and Hold)戦略とも言います)の成果を比較したものが図 5.6-A に、ポートフォリオ保険をかけたファンドの中身、すなわち危険資産部分と安全資産の評価額が図 5.6-B に示されています。ポートフォリオ保険をかけることによって、日経 225 にすべての資産額を投じた場合に比べて運用成果は 9,000 円を割っていないことがわかります。つまりポートフォリオ保険運用を行ったことによってダウンサイド(下方)リスクを回避できたことになります。なぜこのようなことが可能になったかは図 5.6-B の保険をかけたファンドの中身を検討することで理解できるでしょう。ファンド価値が一定以下に近づくにつれて危険資産への投資を減らし、その分を安全資産投資に回していることがわかります。図 5.7 は式(4.13)、すなわち、保険をかけたファンドの中で危険資産に投資した割合を示しています。31 週を過ぎた頃から安全資産投資への比率が増えて、45 週以降はほぼ 100 パーセント安全資産で運用されていることがわかります。

図 5.8 は保険を掛けたファンドと掛けないファンドとで分布(ヒストグラム)がどのようになったのか比較しています。保険をかけていないファンドは 7,500 円から 10,500 円までファンド価値が散らばっているのに対し、保険をかけたファンドは 9000 円以下の部分が欠落していることがわかります。

5.3.4 オプションの行使価格とポートフォリオ保険ファンドの守るべき最低水準との関係

上の分析ではプットオプションの行使価格を K=1 万円と定めて、初期投資額が 1 万円のファンドがある一定水準を割ることのないようにポートフォリオ保険をかけました。問題は「ファンド価値が一定水準を割ることがない」としたわけですが、この一定水準とは幾らになるのでしょうか？　あるいはこの一定水準をまず決めて、それに対応するプットオプションの行使価格を決める方が自然かもしれません。プットオプションの行使価格 K と初

期投資水準の守るべき一定割合 $x: 0 < x < 1$ との関係がどのようになるかを調べてみましょう。

初期投資額 I_0 と初期時点の危険資産額 S_0 とプットオプション価値 P_0 は

$$S_0 + P_0 = I_0 \tag{4.14}$$

となり、プットオプションの行使価格 K と初期投資水準の守るべき一定割合との関係は次の関係を満たすべきはずです。

$$K = xI_0 \tag{4.15}$$

式(4.15)を初期投資額 I_0 に関し解いきその結果を式(4.14)に代入し展開すると

$$\begin{aligned} &S_0 + P_0 = K/x \\ &S_0 + \left(Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)\right) = K/x \\ &S_0\left(1 - N(-d_1)\right) + Ke^{-rT}N(-d_2) = K/x \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$g(K) \equiv 1/x - S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(-d_2) = 0 \tag{4.17}$$

したがって、初期投資水準の守るべき一定割合 $x: 0 < x < 1$ は

$$x = \frac{1}{S_0N(d_1) + Ke^{-rT}N(-d_2)} \tag{4.18}$$

となります。他方、プットオプションの行使価格 K は式(4.17)で x の具体的な値を与えたとき、それを行使価格の関数 $g(K) = 0$ になる行使価格 K を求めればよいのです。行使価格 K と関数 $g(K)$ の間の関係は非線形ですが、単調増加傾向を示すので、解くことは難しくありません。

表 5.2　オプション価格に基づくポートフォリオ保険の計算

' 表5.2 オプション価格にもとづくポートフォリオ保険険 05_02_04_OBPI.prg	
'オプションモデルに基づくポートフォリオ保険:CPPI.prg	
'初期値の設定とスカラー変数の定義	
scalar K = 9000	行使価格
scalar sigma = 0.2	ボラティリティ
scalar r = 0.01	金利(リスクフリーレート)
scalar intfund = 10000	初期投資額
scalar S	株価
scalar d1	d1の定義
scalar nd1	N(d1)の定義
scalar d2	d1の定義
scalar nd2	N(d2)の定義
scalar P	プット価値の定義
!time = @rows(n225)	データ(保険運用)期間
scalar Cycle = 52	データサイクル(週次)
scalar taw = !time / Cycle	残存期間数
vector(!time) n225vec	ベクトル表示の日経225株価
stom(n225,n225vec)	シリーズ表示ををベクトル表示へ
'収益率の計算	
vector(!time) ror	ベクトル表示の収益率の定義
series work = n225/n225(-1)	投資収益率Rt=(1+rt)の計算
stom(work, ror)	シリーズ表示をベクトル表示に変換
'' ベクトルと行列の定義	
vector(!time) w	危険資産投資比率ベクトルの定義
vector(!time) riskyasset	危険資産投資「額」ベクトル
vector(!time) riskfreeasset	安全資産投資「額」ベクトル
vector(!time) portfolio	ポートフォリオ価値ベクトル
vector(!time) riskyassetonly	危険資産だけに投資したときの価値
matrix(!time, 3) output1 = 0	運用結果を収納する行列1の定義
matrix(!time, 3) output2 = 0	運用結果を収納する行列2の定義
portfolio(1) = intfund	初期ポート価値の決定
riskyassetonly(1) = intfund	危険資産に投資したときの初期値
!time_1 = !time - 1	残存期間数を1期減らす
for !t = 1 to !time_1	===(繰り返し計算)===
S = n225vec(!t)	t期の株価Stを取り出す
d1 = (log(S/K) + (r + sigma^2/2)*taw) / (sigma*sqr(taw))	d1の計算
Nd1 = @cnorm(d1)	N(d1)の計算
d2 = d1- sigma*sqr(taw)	d2の計算
Nd2 = @cnorm(d2)	N(d2)の計算
' ブラック=ショールズ・プットオプション公式の計算	
P = K*@exp(-r*taw)*@cnorm(-d2) - S*@cnorm(-d1)	BSプットオプション式の計算
w(!t) = (S*Nd1)/(S+P)	危険資産への投資比率
taw = taw - 1/52	残存時間を1期間短くする
riskyasset(!t) = portfolio(!t) * w(!t)	危険資産への投資額
riskfreeasset(!t) = portfolio(!t) - riskyasset(!t)	安産資産への投資額
riskyasset(!t+1) = riskyasset(!t) * ror(!t)	期末危険資産額
riskfreeasset(!t+1)=riskfreeasset(!t)*(1+r/Cycle)	期末安産資産額
portfolio(!t+1)=riskyasset(!t+1)+riskfreeasset(!t+1)	期末ポートフォリオ額
riskyassetonly(!t+1) = riskyassetonly(!t)*ror(!t)	全てを危険資産に投資したとき
next	====(繰り返し計算)===
'結果のグラフを描く	
colplace(output1, portfolio, 1)	ポートフォリオ価値
colplace(output1, riskyasset, 2)	危険資産価値
colplace(output1, riskfreeasset, 3)	安産資産価値
colplace(output2, portfolio, 1)	ポートフォリオ価値
colplace(output2, riskyassetonly, 2)	危険資産だけに投資したときの価値
output1.line	折れ線グラフを描く
output2.line	折れ線グラフを描く
w.bar	危険資産への投資比率の棒グラフ
mtos(riskyassetonly,riskyaseet_hist)	危険資産だけに投資したときの分布
riskyaseet_hist.hist	そのヒストグラム
mtos(portfolio,portfolio_hist)	PIをかけたときのポートの分布
portfolio_hist.hist	そのヒストグラム

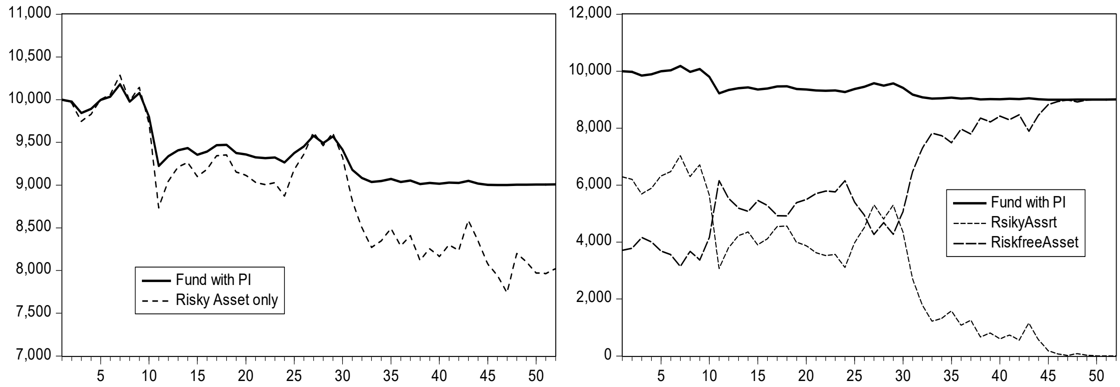


図44-A　ポートフォリオ保険あり(実線)となし(点線)の運用成果比較

図44-B　ポートフォリオ保険ありファンド(実線)とその内容(危険資産(細い点線)と安全資産(太い点線)

図 5.6　ポートフォリオ保険(PI)運用の成果の分析（05_02_StrBond.prg）

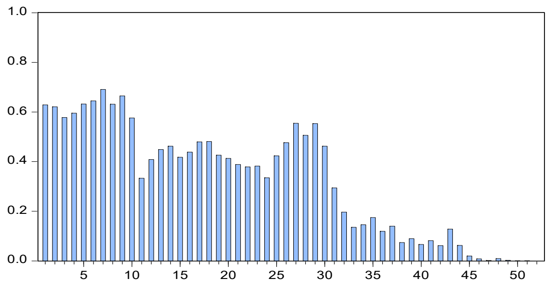
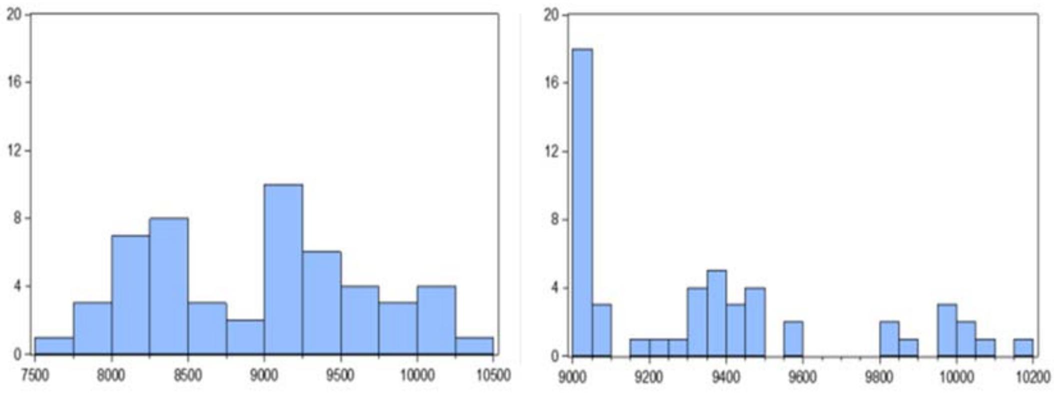


図 5.7　ポートフォリオ保険運用ファンドに占める危険資産運用比率の時間推移:W(t)（05_02_StrBond.prg）



図A　ポートフォリオ保険「なし」の運用成果(ヒストグラム)

図B　ポートフォリオ保険「あり」の運用成果(ヒストグラム)

図 5.8 ポートフォリオ保険無し(左)とポートフォリオ保険あり(左)の場合の分布(ヒストグラム)　(05_02_StrBond.prg)

5.4 CPPI: 比率一定型のポートフォリオ保険: 誰でもわかるポートフォリオ保険

これまでは特定のオプション価格決定モデル、この場合はブラック・ショールズ・モデルを用いたポートフォリオ保険を説明しました。もう１つよく知られたポートフォリオ保険に比率一定型のポートフォリオ保険(CPPI: Constant Proportional Portfolio Insurance)があります。「比率一定」とは、上のオプション価格理論を用いたポートフォリオ保険では、式(4.12)に示されたように株と安全資産への投資比率 w_t と $1-w_t$ は、株価や満期までの期間 $T-t$ 、無リスク金利、ボラティリティなどが毎期変わることにより変わります。

5.4.1 CPPI の考え方

これに対し比率一定型ポートフォリオ保険 CPPI ではポートフォリオ価値と行使価格(これを CPPI では床(F :フロアー)と呼びますが)の差の「一定」割合を常に株式に投資するようにすることからそのように名付けられています。

比率一定型ポートフォリオ保険では危険資産である株式への投資額、これを t 期のエクスポージャー(E_t : Exposure)と呼び、それは次の式

$$\tilde{E}_t = m\tilde{C}_t \tag{4.19}$$

で計算します[1]。残りの資金残額は安全資産に投資します。ここで、m を乗数(multiplier)、C_t を t 期のクッション(Cushion)と呼びます。クッション C_t は株式 E_t と安全資産 B_t の合計であるポートフォリオ価値 $V_t = E_t + B_t$ から保険額をあらわす床(F_t ：行使価格)を差し引いた余裕部分になります。つまりクッションを次のように定義します。

$$C_t = \tilde{V}_t - F_t \tag{4.20}$$

CPPI 型の運用は、オプション価格モデルを用いた運用(OBPO: Option Based PI)と異なり、床(行使価格)F と定数mだけを与えれば良いこと、運用方針が直感的にわかりやすいことにより実務においても良く用いられ人気のある運用戦略になっています。床 F と定数 m だけを与えれば良いということは、運用期間(OBPI の言葉で言えば満期 T)を決める必要がありません。更に危険資産のボラティリティは、一見するとですが、必要ないことになります。直感的にわかりやすい運用であることは、式(4.20)を式(4.19)に代入すると危険資産に対する投資「額」は次のようになることから理解できます。

$$\tilde{E}_t = mC_t = m\left(\tilde{V}_t - F_t\right) \tag{4.21}$$

もしポートフォリオ保険をかけたファンド価値 V_t が守るべき床(フロアー) F_t より大きく離れていた場合、つまり余裕度合いを表すクッションが大きな時はそれに一定の定数 m を掛けて求めた危険資産への投資額も大きくなります。他方、ファンド価値 V_t が守るべき床 F_t に近づくにつれ、つまり余裕度合いを示すクッションが小さくなると危険資産への投資額

[1] アインシュタインによる有名なエネルギーと質量との間の関係を規定する公式に $E = mC^2$ があります。これに対し式(4.19)は $E_t = mC_t^1$ としています。CPPI を考えた Fischer Black を中心とするゴールドマン・サックス社の研究者のユーモアでしょう。詳しくは Mehrling(2005)第 7 章を参照。

は小さくなり、安全資産への投資額が増えます。もしファンド価値が床に等しくなると、m が幾ら大きな値であっても、危険資産への投資額はゼロになります。つまりポートフォリオは全額安全資産で運用することになり、フロアー(床)よりも価値が小さくなることはありません。しかし、ファンド価値がフロアーに一旦達するとそれ以降すべての期間で全額が安全資産で運用することになり、それ以降危険資産価格が上昇しても市場の上昇を捕まえることができなくなります。この点はオプション価格モデルにもとづくポート保険と同じことです。この点を避けるためにはフロアーをより低く設定することにします。

5.4.2 EViews による CPPI の実行と結果

表 5.3 は上で説明した比率一定型のポートフォリオ保険戦略を実行するための EViews プログラムです。プログラムの各行を以下に説明しましょう。

2 行目は既存の計算結果のグラフ(fig1,fig2,fig3)を削除するためのコマンドである。3 行目から 8 行目で CPPI モデルへのインプット・パラメータと初期値の具体的な値を与えます。危険資産の時点ゼロの値が E_0 =stock0 = 6000 円、現預金あるいは短期債券が cash0= 4000 円、フロアー(最低保証額)が F = floor=9000 円、乗数が m =2、年あたりリスクフリーレート r = 0.01=1%、運用期間が Cycle = 52 週としました。10 行目から 14 行目までで、計算に用いる系列(シリーズ)属性をもつ変数を定義し初期化します。10 行目と 11 行目で危険資産である株式の系列を Stock、安全資産である現預金の系列を cash としています。12 行目で危険資産と安全資産の合計を CPPI の対象になるポートフォリオとします。13 行目では、5 行目で与えた最低保証額(Floor)を、系列属性をもつ floor_series として定義しています。14 行目は資金の全額(1000)を危険資産(株式)で運用したときの結果を格納する系列 stockonly を定義しています。

16 行目から 22 行目までが CPPI 計算を実行する主な部分です。17 行目で参照すべき危険資産である 2011 年の週次の日経平均株価指数から週次の投資収益率 ror を計算しています。18 行目で比率一定型のポートフォリオ保険をかけたときのファンドの価値を計算しています。19 行目で危険資産への投資額を、式(4.21)にもとづいて計算しています。20 行目でポートフォリオ価値から 19 行目で計算した危険資産への投資額を差し引くことにより、残りを安全資産への投資額とします。21 行目が全額を危険資産に投資したときの価値を計算しています。

23 行目と 24 行目で、それぞれポートフォリオ保険をかけたファンドの危険資産と安全資産への投資比率を計算しています。

行 26 から行 31 までで結果の時系列を書いています。行 26 と行 27 は図 5.9 の右側の図 B を描くためのコマンドです。fig1 というグラフ名をつけ、3 つの時系列 portfolio、stock と cash を fig1 という既に登録されたグラフ作成用のテンプレート(template)に従って描きます。この場合行 27 に従い 3 つの線は白黒で出力します。グラフ・テンプレートを利用したとしても、図 5.9 のような最終的な図を描くためには若干の手作業で修正する必要がありますが、分析結果を論文や報告書にまとめる場合は便利なやり方です。その他の図も同様にして作成できます。

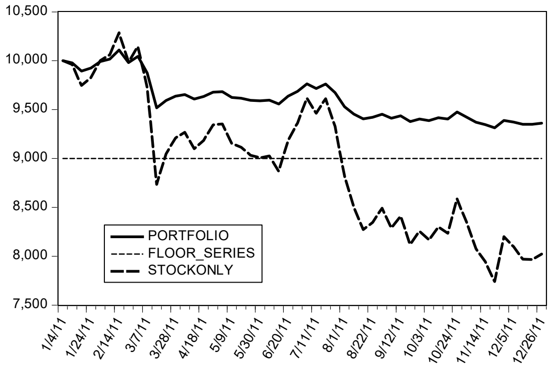
表 5.3　比率一定型のポートフォリオ保険の計算

```
' 表5.3 比率一定型のポートフォリオ保険 :05_04_02_CPPI.prg
'' 比率一定型のポートフォリオ保険:CPPI.prg
delete fig1 fig2 fig3
scalar stock0 = 6000
scalar cash0 = 4000
scalar floor = 9000
scalar m = 4
scalar r = 0.01
scalar Cycle = 52
smpl @all
series stock = stock0
series cash = cash0
series portfolio = stock + cash
series floor_series = floor
series stockonly = portfolio
'' CPPIの計算
for !t = 2 to 52
  ror = n225/n225(-1)
  portfolio(!t ) = stock(!t -1)*ror(!t) + cash(!t-1)*(1+r/Cycle)
  stock(!t)  = ( portfolio(!t) - floor ) * m
  cash(!t) = portfolio(!t) - stock(!t)
  stockonly(!t) = stockonly(!t-1)*ror(!t)
next
series rate_stock = stock / portfolio
series rate_cash  = cash / portfolio
'' 結果のグラフを描く
graph fig1.line(t=fig1)  portfolio stock cash
fig1.options -color
graph fig2.line(t=fig2) portfolio floor_series stockonly
fig2.options -color
graph fig3.bar(s,t=fig3) rate_stock rate_cash
fig3.options -color
```

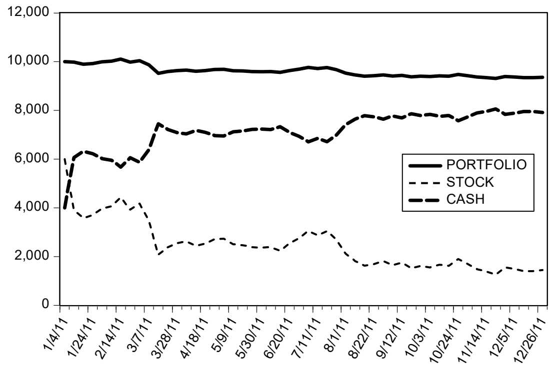
5.4.3　結果の分析

図 5.9 の左側の図 A には 3 本の線が描かれています。一番上の実線は CPPI 型のポートフォリオ保険をかけたファンドの推移です。2011 年は東日本大震災のあった年であり、6 月の中旬から 7 月下旬の一部の期間を除き、日経平均株価は値下がり傾向を示しました。一番下の右下がりの傾向を示す点線が、初期資金 10,000 円を全額日経平均で運用した結果です。真ん中の時間軸(横軸)に水平な直線は、ポートフォリオ保険の最低保証金額をし

めすフロアー(F=9,000 円)を示しています。投資資金全額を危険資産である日経平均に投資をしていると、8 月 1 日以降は最低保障以下の成果しか得られません。これに対し、CPPI を掛けたときにはフロアー9000 円を割ることはありません。この場合、定数を m=4 としましたが、ポートフォリオ価値とフロアーとの差であるクッション C は 500 円近くあるので、定数をもう少し大きくしても良いかもしれません。



図A ポートフォリオ保険をかけたファンド(実線)とかけなかったファンド（右下がりの点線）



図B ポートフォリオ保険をかけたファンドの構成金額：株式（点線）と債券（実線）

注)CPPI は定数(m)が 4、最低保障(F)を 9,000 円とし、初期投資額 10,000 円(危険資産 6,000 円＋安全資産 4,000 円)での運用結果　(05_04_02_CPPI.prg)

図 5.9　CPPI の実行結果

図 5.9 の右側の図 B は、CPPI 運用を適用したにポートフォリオ価値とその構成(株式と安全資産)が時間とともにどのように変化したかを示したものです。出発時点(1 月 4 日)に危険資産(株式)が 6,000 円、安全資産が 4,000 円、合計 10,000 円の投資資金で出発しましたが、その翌週(1 月 11 日)には安全資産が 6,070 円、危険資産が 3,908 円と逆転しました。その後一貫して株式より現金での運用額の方が大きいことが見て取れます。図 5.10 はこの点を金額でなく相対比率で表したものです。

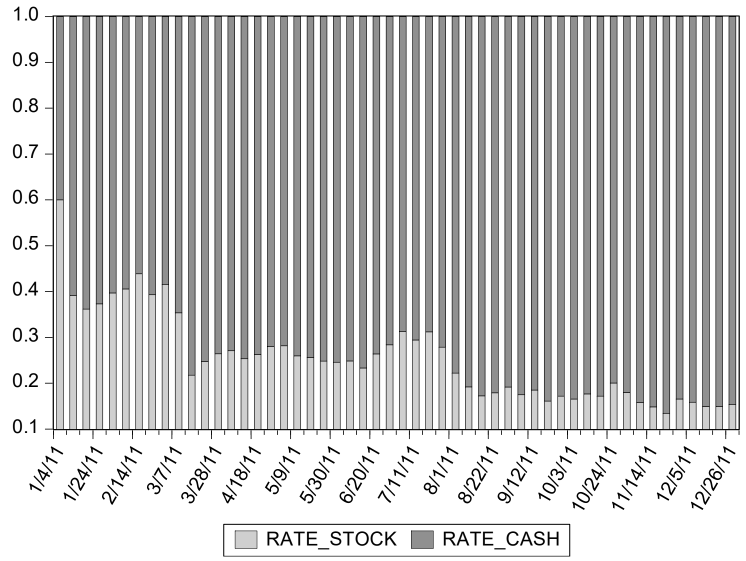


図 5.10　ポートフォリオ保険をかけたファンドの株式と短期債券の安全比率 (05_04_02_CPPI.prg)

5.4.4　CPPI 運用において注意すべきこと。

比率一定型のポートフォリオ保険は、4.7 節で議論したオプション価格をもとにしたポートフォリオ保険(OBPI)に比べて、1)運用期間 T やボラティリティ σ の値を与える必要がなく、単に乗数 m と最低保証額 F のみを考えれば良いこと、2)ブラック=ショールズモデルなどの「難しい」オプション価格の理解が必要でないこと、などから資産運用の世界で広く使われている運用手法です。「リスク調整型ファンド」と呼ばれている投資信託の多くは CPPI 手法に基づいているものと推測できます[2]。しかし、乗数 m と最低保証額 F の決定に当たっては、CPPI の背後にある理論をよく理解する必要があります。実は、乗数 m と最低保証額 F を「適当に」決めることはできないのです。この 2 つの決定に当たっては、表 4.1　の式 2 に示した危険資産の確率微分方程式の 2 つのパラメータ (σ, μ) や、投資家危険回避度 λ 、異時点間の効用関数に対する時間選好率 ρ 、投資家の最低少水準 $c_{\min}$ などを考慮すべきなのです(詳しくは Black and Perold(1992)を参照)。理論を知らずして「適当な」運用を行って失敗するファイドが実はそれなりにあるのです。

文献解題

この章全般に関する和文の参考文献としては、初心者にはやや難しいかもしれませんが、浅野幸弘(1985)が参考になるでしょう。5.2 節では「困った」金融商品の設計例を示しましたが、そうではない「良い」金融商品をもあります。それは市場で取引が行われていないも

[2] 日経新聞の記事「リスク調整型ファンドが増加」、2014 年 3 月 13 日朝刊を参照

の(天候、地震や台風などの大災害など)を対象にする金融商品です。幾つかの事例については森平(2014)を参照してください。CPPI に関する数学を多用しない分かりやすい幾つかの論文の翻訳がゴールドマンサックス(1991)にあります。そのうちでも特に Black and Jones (1987)をまず参考にしてください。CPPI の背後にある詳細な理論的分析については Black and Perold (1992)が役立ちます。2 つのポートフォリオ保険戦略、OBPI と CPPI のわかりやすい相互比較については、Perold and Sharpe (1995)、Ho, Cadle and Theobald (2010)などが参考になると思います。

プロジェクト課題

参考文献

1. 浅野幸弘(1985)『先物・オプションの活用戦略: 派生証券とポートフォリオ・インシュランスの理論と応用』東洋経済新報社
2. 森平爽一郎（2014)「金融商品のプライシング：保険・投信・仕組み債を考える」，『経済セミナー』，678，35-41.
3. Black, F, and A Perold (1992). “Theory of Constant Proportion Portfolio Insurance”. *Journal of Economic Dynamics and Control* 16 (3-4): 403-426.
4. Black, F. and R. Jones (1987) “Simplifying Portfolio Insurance,” *Journal of Portfolio Management*,14(1), 48-51.日本語翻訳が『ニューファイナンスシャアルテクノロジー』に所収されている。
5. ゴールドマン・サックス証券(1991)『ニューファイナンスシャアルテクノロジー』、86-140, 金融財政事情研究会
6. Ho, L., Cadle, J., and Theobald, M. (2010) “Portfolio Insurance Strategies: Review of Theory and Empirical Studies.” C.F. Lee, A. C. Lee, and J. Lee edts, *Handbook of Quantitative Finance and Risk Management* 319–332. Boston, MA: Springer US.
7. Perold, A. F., and Sharpe, W. F. (1995) “Dynamic Strategies for Asset Allocation”. *Financial Analysts Journal*, 51(1), 149–160.