

## まえがき

「線型代数学」は、理系大学生であれば大学初年に履修する必修科目である。この科目の内容は純粋数学にとどまらず、物理学、工学、情報科学、応用数学、経済学など、ありとあらゆる分野で使われることから、重要な基礎科目として位置づけられる。このため、大学で行われる「線型代数学講義」の到達目標も、行列計算という実用的な内容から、定理の証明理解までさまざまであろう。

筆者の本務校である数学科では、多くの学生が大学卒業後に中学・高校の数学教師になることを目指している。学校数学にも線型代数学と関係する内容がたくさん含まれるが、教師になってしまえば、大学で学ぶ線型代数学の内容を授業で直接扱う場面はない。では、教師志望学生を含め、将来仕事で線型代数学を直接使用することのない学生たちにとって、線型代数学は「大学2年次以降で学ぶ数学のための基礎知識習得」という意義しかない科目なのだろうか。

筆者は、一見すると何気ない小学生にでもできる計算の中に隠されている深い原理を見抜くという「数学的経験」ができることにこそ意義があると考えている。このことに関連して、長岡亮介先生はそもそも数学を学ぶ意義について、いみじくも次のように述べられている。

「数学を理解しようと努力する場面においては自分が正しいと信じた仮説が完全に間違っているという経験は誰しものがするものである。そして、自ら誤りに気づき、修正して真理に接近することは、社会に出てからの人生においてもまた、有意義な経験になるだろう」

残念なことに、筆者の勤務校では、線型代数学の試験は高得点をとれるが、その原理については考えようとしたこともない、という学生が多いように見受けられた。本書は、「線型代数学は本当はとても興味深い学問である」ということを知ってもらう目的で、筆者のゼミの教職志望学生向けに作成した原稿を基にして著したものである。読者による原理の理解を主眼としたため、通常の線型代数学の書

籍とは以下の点において大きく異なる構成になっている。

- (1) 行列の扱いはおもに2次正方行列に限定し、必要最低限にした。
- (2) 高校で学ぶベクトルの扱いから自然に基底が学べるように工夫した。
- (3) 線型空間の理解のため、数ベクトル空間の例示をあえて避けた。
- (4) 漸化式の話題を通じて、固有値、固有ベクトルの議論を展開した。

(1) 線型代数学の書籍は、行列についての演算や行列式、逆行列、掃き出し法といった行列計算法から始まるのが普通であるが、本題に入る前の行列計算だけで疲弊してしまったり、逆に行列計算ができたというだけの理由から線型代数学を理解できたという思い違いをしないでほしいという理由から、行列は必要になった段階で必要な計算を説明することにとどめた。

(2) 線型独立や基底の概念は誰もが無意識に高校数学ですでに習得している。それを意識して、抽象的な概念理解につなげる工夫をした。

(3) 通常書籍では抽象的線型空間の定義の直後に、その具体例として、実数を成分とする数ベクトルからなる空間が紹介される。最も典型的な例であるというのがその理由であろう。しかし、この例は、高校数学でも普通に扱われていることから、「空間を定義しそれに属する元のことを《ベクトル》とよぶ」という難解かつ独特な定義の真の意味を理解することの弊害になりかねない。線型空間における線型独立性/従属性は線型空間論において最も重要な概念の1つである。その抽象的理解のために、多くの書籍ではやはり、数ベクトル空間における線型独立性/従属性が具体例として扱われるのが普通である。重要な例ではあるが、本来の目的である概念理解が行列計算練習に《埋もれてしまう》可能性も否定できない。こうした理由から、本書ではあえて数ベクトル空間の扱いは練習問題程度にとどめた。

(4) 本書の原型が「教職志望学生向けの原稿」であったことから、高校数学の題材を通じて理解することを重視し、漸化式の線型空間の理論に基づく扱いに多くのページを割いた。

筆者は、「基底を取り替えることによって、見える世界が変わり、わかりづらい対象もじつに簡単な構造に見えるようになる」という線型代数学の世界観こそが、この学問の習得によって学び取ってほしい大切なことの1つであると考えている。筆者の解説を聴いていたゼミ学生の中には「線型代数学は行列計算習得のための科目、ではなく、こんなにも興味深い科目だったのか」と思わず膝を打ち、感慨

にふける者もいた。それは筆者の拙い努力も少しは意味があったのではないかと感じた瞬間でもあった。

一方で、面白さを伝えることを優先するために犠牲になることもある。本書では、たとえば一般  $n$  次正方行列の行列式や、逆行列の掃き出し法による求め方、あるいは「クラメールの公式」といった、通常の講義では必ず触れられるであろう必須項目にはまったく言及していなかったり、Jordan 標準形の証明までは到達できていない。

線型代数学で学ぶ内容は、その応用の広さからもわかる通り、じつに盛りだくさんである。この科目を講義しようとするれば、限られた時間内で学生たちに必須の内容を習得させることが求められるため、教える側も教わる側も、まずはとにかく「計算方法の習得」を優先するということが致し方ない面はあるであろう。数学の講義では原理を示唆的に学生に伝えたい、とつねづね考えている筆者にあっても、教えるべき内容があらかじめ必須項目として定められている講義であれば、まずは内容紹介と計算力をつけることから始め、原理や本質の説明は後回しにするだろう。

原理や本質をとらえて理解することはそれなりに難しいことであり、時間もかかり、それを実現するためには決して避けて通れない難所がいくつかあることも事実である。しかし、それを避けて、本当の原理を知ることなく計算のみを習得すればそれでよし、となってしまうと、「線型代数学」は、やっつけ仕事で取り組む、暗記主体の、単位取得のための興味のわからない科目になってしまうのもまた、事実であろう。

このように俯瞰してみれば、本書は、その原点が少人数のゼミ学生を対象に、カリキュラムに一切とらわれることなく作成した原稿であったからこそ、原理の示唆に徹することができた、ということができよう。

本書を通じて線型代数学に興味をもち、自らもっと勉強しようという意欲をもち、それが本格的な専門書との格闘の原動力となってくれたならば、まさに望外のことである。

筆者は、2018年に長岡亮介先生と知己を得たことをきっかけに、TECUMの活動に参加させていただくようになった。そこでは、現行の数学教育の問題点を鋭く指摘し、警鐘を鳴らすとともに、真の教育を模索する試みが行われていることを知った。ゼミ学生に線型代数学の本当の面白さを知ってほしいと原稿を作り、

それを原型として本書執筆に至ったことは、数学全般はもちろんのこと、英語、フランス語、ドイツ語、ロシア語からラテン語に至るまでの並外れた造詣の深さに裏付けられた長岡亮介先生の数学教育への熱い思いと TECUM の活動に、大いに触発されたからに他ならないことを、書き添えたい。

### 謝辞

漸化式の解法を目標として原稿を執筆したきっかけは、数学教師、および、教職志望の大学生向けに書かれた刺激的な書籍 [10] (参考文献) から強い影響を受けたことによる。[1] および [9] からたくさんの知識を導入し、それらは本書の内容へと結実している。さらに、本書にはそれらの著者である長岡亮介先生からの学問、教育の両面について、直接影響を受けて考察した箇所も数多く含まれる。心から感謝申し上げたい。また、TECUM 定例研究会で得た知識も多く含まれる。NPO 法人「TECUM」にお礼を申し上げたい。

練習問題の詳細解答<sup>\*)</sup>の多くは、矢部千尋、木村圭佑両氏 (筆者ゼミ卒業生) により、LaTeX で作成された。略解はこの詳細解答を基にして作成された。山本優希氏 (筆者ゼミ卒業生) にも内容のチェックをお願いした。東京大学理科二類 2 年生 (2023 年度時点) ポンピイ・パイン氏には本書前半部分について、数多くの誤植をご指摘いただいた。ここに深い感謝の意を表したい。

大阪大学の石渡通徳教授には本書の査読をお引き受けいただき、たくさんの貴重なご指摘をいただいた。また、第 8 章脚注 6) では、教えていただいた逸話をそのまま引用させていただいた。

本書校正にあたり、亀書房の亀井哲治郎、英子ご夫妻には、拙い原稿を詳細に検証いただき、数えきれないほどのご指摘、アドバイスをいただいた。さらに、東京書籍の松並奏史氏 (TECUM 理事) にもいくつもの貴重なご意見、ご指摘をいただいた。

本書は以上の方々のご協力なしには完成しなかった。誠に感謝の念に堪えない。

2025 年 11 月 18 日

山浦義彦

---

\*) 練習問題の「詳細解答」は、日本評論社の Web ページに掲載される予定です。

## 基礎数学の「難しさ」にめげない人のための羅針盤

—『線型代数がわかる新しい学び方』に寄せて

長岡亮介

数学を理解する上で、基礎の大切さを強調する意見を耳にすることは多いでしょう。この頻度の多さは、基礎をしっかりと築くことの意外な難しさの表れです。しかし、実際にはこの逆説の真理に気づく人は多くありません。高層建築の華やかさは誰の目にも鮮やかですが、それを支える基礎工事の大切さに気づく人が少ないのに対応しているように思います。

情報ネットワークの重要性が声高に叫ばれる今日ですが、それを支えているのが線型代数 linear algebra と呼ばれる現代数学の基礎的な方法であることに関心を寄せる人も多くはないでしょう。線型代数は、その応用範囲の広さが物語るように、極めて自然な数学的手法です。他方、その理論的な整備と数理世界全体への普及は 20 世紀に入ってからだったことに示唆されるように、その重要性の本質、言い換えると数学的普遍性が抽出されるには現代数学の発展が不可欠でした。

こうした背景からも示唆されるように、現代の多くの大学生にとって、線型代数は大学で突然遭遇する、ひどく抽象的で意味不明な空理空論と感じられがちです。それでも、「ベクトル」と「行列」が高校数学の必須重要単元であった時代には、「線型結合」や「線型独立性」は、表面的な理解ながらも、かろうじて親しまれていた概念だったのでしょうが、その「初歩的な体験」すら欠く世代が続々と大学に入学してくる時代にあっては、方法論的に見て斬新な現代数学の理解というハードルを、初々しい初学者が超える困難は、以前とは比較できません。多くの大学生が、「行列」や「行列式」の繁雑な計算手順を意味も分からず「丸暗記する」だけで、線型代数の革新的発想を理解せずに、現代数学との重要な出合いを呆然とやり過ごしてしまうこと、必然でしょう。

この事態を打開するには、斬新な世界との出合いを、最初の当惑にめげずに、理解をめざす思索を粘り強く継続する思考力とともに、苦難の歩みの行き先を照らす、《進行の安心と希望の灯台》というべき指導者と教科書が重要です。

理学系数学科などは、中等教育の指導者を輩出することが期待されるわけですが、しかし大学初年級の最初に学ぶ基本の基というべき線型代数の入門で躓き、そ

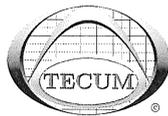
れに続く大学数学を何も分からずに卒業し、その途端に「一人前の教員」になってしまうと、学校で教えられる初等数学——私は誤解の少ない「学校数学」と呼ぶのを好むのですが——の「すぐ先にある本格的な数学をまったく知らない数学の先生」という不可解な存在が誕生することになってしまいます。そういう先生は、中高生と同じように、見よう見まねで覚えた練習問題の解法のテクニックを「分かりやすく」教え込むことにはまりがちです。先に広がる広大な数理世界を想像もできないからです。初めて接すると難解そうに映る、しかしじつは数学的にはきわめて自明な数学の技術的な技巧をさも難しそうに懇切丁寧に「教える」ことによって、数学的思索を知らない生徒を再生産するという「教育の悪循環」が開始されてしまいます。しかも現代では、検定教科書の練習問題集化もあって、この悪循環は日本全体を覆う勢いです。

大学時代の学習経験が不十分かもしれない数学教員志望者や現役の教員のために、教員として不可欠な「学校数学」のやや進んだ理解を補い合うことを目的として、私は志を共有する人たちとともにボランティア的な運動体 TECUM を組織しました。それは、日本のこのようなやむにやまれぬ現状に何とか楔を打ち込みたいと願ったからでした。

この抜本的な刷新を思うと、規範的な風格をもち、それでいて初学者の気持ちに寄り添う、時代に合った教科書の存在が決定的に重要です。学習者が「なんだ、そういうことだったのか!」と思わず膝を打つような、理解できたときの感動なしには、いかなる高級な理論や概念の知識も意味がないからです。

この『線型代数がわかる新しい学び方』は、AI時代に不可欠な線型代数の方法論的核心を、高校生でも少し背伸びすればわかるように、丁寧かつ具体的に示した入門書であり、著者の誠実な人柄とその裏に潜む教育へのほとばしる情熱の産物に他なりません。

教員志望の学生はもちろん、線型代数の思想が何であったかを理解し損なった現役教員を含む、線型代数を生きる道具として必要とする一般の人々に読んでほしいと思います。



2025年11月8日

(ながおか・りょうすけ/NPO 法人 TECUM© 理事長)

<https://www.tecummath.net>