

はじめに

本書は代数群の教科書である． $GL_n(\mathbf{C})$ は Lie 群と呼ばれる群の一例であり，群であると同時に，位相空間としての構造をもつ．代数群は，例えば $GL_n(\mathbf{k})$ のように，Lie 群の基礎体 $\mathbf{C}$ を任意標数の体 $\mathbf{k}$ に置き換えて得られる Lie 群の類似物である．しかし正標数の場合には $GL_n(\mathbf{k})$ に自然な位相空間の構造は期待できないので， $\mathbf{k}$ を代数閉体と仮定し，代数幾何の理論に基づいて群構造を調べることになる．

“代数群”という用語は，1880 年頃の Picard による線型微分方程式の Galois 群の研究に登場する．彼の研究は微分方程式の Galois 理論であり，今日では Picard-Vessiot 理論として知られている．そこに現れる Galois 群が本書でいうところの， $\mathbf{C}$ 上の線型代数群であった．さらに 1948 年頃，Kolchin は Picard-Vessiot 理論に関連して，正標数の線型代数群を研究し，1956 年に Borel [Bo1] によって線型代数群の基礎理論が構築された．次いで 1956-1958 年の Chevalley セミナー [Ch3] において半単純代数群の分類が完成した．本書では，その拡張である簡約代数群の構造理論について述べる．

一方，1955 年 Chevalley [Ch2] は $\mathbf{C}$ 上の半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ 上に Chevalley 基底と呼ばれる，よい性質をもった基底を構成した．Chevalley 基底による $\mathfrak{g}$ の構造定数はすべて整数となり，この基底に関する $\mathfrak{g}$ の随伴表現の，ある生成元系 (Chevalley 生成元と呼ばれる) に関する表現行列はすべて整数行列になる．この性質により，Chevalley は $GL_n(\mathbf{Z})$ (ただし $n = \dim \mathfrak{g}$) の中に $\mathfrak{g}$ の自己同型からなる部分群 $G_{\mathbf{Z}}$ を構成することに成功した．より一般に，任意の単位元 1 をもつ可換環 R に対して $GL_n(R)$ の部分群 G_R が定義される． G_R を R 上の Chevalley 群という． R が代数閉体 $\mathbf{k}$ の場合， $G_{\mathbf{k}}$ は半単純代数群を与える．一方， $\mathfrak{g}$ が単純で， R が有限体 $\mathbf{F}_q$ の場合，少数の例外を除いて $G_{\mathbf{F}_q}$ は有限単純群となり，そこから多く

の有限単純群のクラスが統一的に得られる．Chevalley 群の発見は当時一大センセーションを引き起こしたのだった．

Chevalley 群の構成は非常に具体的であって，精密な計算に向いており半単純代数群のよいモデルを提供する．しかしそこには一つ内在的な問題があった．それは Chevalley 基底の構造定数を決める簡明な公式が ± 1 倍を除いて存在するものの，その符号を決定する統一的な方法がないことである．Chevalley 群の計算において，最初のハードルは構造定数の符号の決定であった．一方，Lie 環論において，単純 Lie 環の存在は Serre により抽象的な議論で証明されていたが，特に例外型を含めた具体的かつ統一的な構成は知られていなかった．Tits [Ti2] は Chevalley 基底から出発して半単純 Lie 環を統一的に構成することを試みているが，ここでも Chevalley 基底の符号の問題が深刻な影響を及ぼしている．

このような半世紀以上も前の問題に，近年新たな光が投げられた．それは量子群の標準基底の発見である．Lusztig [L12]，Geck [G1] は量子群の随伴表現の標準基底を特殊化して得られる $\mathbf{C}$ 上の単純 Lie 環の基底（これを標準基底と呼ぶ）を，Chevalley 基底の代わりに用いることにより，Chevalley 群を構成し，この基底に関しては符号の問題が回避できることを示した．[G1] では標準基底を使って Tits の問題を再び取り上げ，単純 Lie 環の見通しのよい直接的かつ統一的な構成を与えている．

本書の目標は代数群の基礎理論の解説である．しかし，代数群についての教科書は良書が何冊も出版されているものの，初学者にとっては読みやすいものではない．代数幾何についての予備知識を最初の段階から要求されるので，代数幾何に不慣れな読者にはしきいが高く感じられるだろう．そこで本書では，Chevalley 群を通じた代数群へのアプローチを試みることにした．「Chevalley 群と代数群」という本書のタイトルは，それに由来する．既に前段で説明したように，Chevalley 群の理論は基本的に行列群の話なので理解が比較的容易である．代数幾何は不要であり，その議論はむしろ有限群論の延長といえるだろう．しかし半単純代数群の幾何的理論とは多くの（形式的な）共通点をもっており，読者は知らず知らずのうちに，代数群の議論に慣れ親しむことができる．Chevalley 群の理論は，半単純代数群の理論から，代数幾何の部分を取り除いたものとみなせるのである．さらに，半単純代数群の計算には Chevalley 群としての表示が不可欠であることも強調しておく．

本書の構成について述べる．本書では第 1 章で半単純 Lie 環，第 2 章で Chevalley

群について議論し、第3章で、代数群の一般論を概観する。第4章は量子群、特に量子群の標準基底についての紹介である。本書の中核的部分は2章と3章である。2章では、[L12], [G1]にしたがって、Chevalley 基底の代わりに標準基底を使って Chevalley 群を構成する。一方、Chevalley による Chevalley 群の構成はのちに Steinberg [St1]によって一般化され、Chevalley 群の変形である Steinberg 群が定義された。これについても Geck [G2]による極小ウェイト (minuscule weight) 表現の標準基底を使った構成を紹介する。

第1章の Lie 環論は Chevalley 群の理論への準備である。本書では、半単純 Lie 環の標準基底が重要な役割を演ずるため、1章では $\mathfrak{g}$ の随伴表現に対する標準基底の構成を詳しく説明する。また同時に極小ウェイト表現の標準基底も構成する。本書では以後、随伴表現と極小ウェイト表現を並行して議論することになる。さらに、Geck [G1]による随伴表現の標準基底を使った単純 Lie 環の直接的かつ統一的な構成について説明する。これらの結果は今までの Lie 環論の教科書には現れなかったものである。

第2章の Chevalley 群では、標準基底を使った Chevalley 群の構成について述べる。これらは Steinberg が Chevalley 群の講義録[St1]で Chevalley 基底を使って展開した議論を、Geck [G1], [G2]にしたがって標準基底を使った議論に置き換えたものである。

第3章の代数群では、線型代数群の基礎を概観したのち、簡約代数群の一般論を解説する。本章は基本的に Springer [Sp]や[堀]等の標準的な代数群の教科書の構成によっている。先にも注意したように、代数群の理論を展開するためには、代数幾何の初歩的知識が必要になる。これについては附章 A に最低限の事項をまとめておいたので、本章を読む前にぜひ目を通していただきたい。本書では、2章との関連もあるので、代数群と Chevalley 群との関係について詳しく述べた。元来、代数群の教科書に Chevalley 群は登場しない。Chevalley 群をきちんと定義しようとする、かなり大変で代数群の教科書に載せるのには無理がある。一方、Chevalley 群の教科書では代数幾何が使えないので、代数群についての本格的な議論はできない。Steinberg の Chevalley 群の講義録 [St1]では第5章で Chevalley 群と代数群との関係について述べられているが、代数群の知識は仮定されている。本章では代数閉体 $\mathbf{k}$ 上の Chevalley 群が半単純代数群になることについて、3.9 節で詳しい証明を与える。その上で、2章の Chevalley 群についての結果を半単純代数群の理論に応用する。

ところで代数群の理論では、有限 Chevalley 群との関係で Lang の定理が重要な役割を果たすが、本章ではその一般化である Steinberg の定理を紹介した。Lang の定理が代数幾何により証明されるのに比べ、Steinberg の定理の証明は実に群論的である。

第4章は量子群の紹介である。1章、2章で早い段階から“量子群の標準基底”なる言葉は登場するが、そこでの議論に量子群の理論自体は不要である。しかし特殊化から得られる Lie 環の標準基底が Chevalley 基底と同等の高い整数性をもつのは、それが量子群の標準基底に由来するからである。そこで量子群に興味をもつ読者のために、4章では量子群の標準基底からどのようにして単純 Lie 環の随伴表現や極小ウェイト表現の標準基底が構成されるかを説明する。量子群の標準基底は Lusztig [L8]により幾何的理論を用いて構成され、またそれと同等の基底が柏原[K2]の結晶基底の理論によって構成されている。しかしそれらはいずれも壮大な理論であり、本書では結果を述べるにとどめた。代わりに中島啓氏の上智大学での講義録[中]で提起された問題意識にしたがって、有限型の量子群に対する標準基底の初等的構成を試みる。つまり、量子群の PBW 基底を利用して Lusztig の幾何理論も、柏原の結晶基底の理論も使わずに標準基底を構成するのである。

なお、代数群および Chevalley 群についてまったく予備知識をもたない読者には、1章から順番に読むことをお勧めする。1章、2章の内容は平易であり、3章での本格的な代数群の議論に対するウォーミングアップになるだろう。一方、3章は(3.9節を除いて)前半の話題からは独立しており、より進んだ読者は直接3章から読み始めることもできる。3.9節に Chevalley 群が出てくるが、その時点で2章を適当に参照してもらえば十分である。また4章も、3章の話題からは独立している。3章までの議論に量子群自体が関係することは、1章での標準基底の定義を含めて、一切ないのである。

上記で強調したように本書における第4章の役割は、あくまで1章、2章に対する補足説明という位置付けであり、決して量子群の理論自体が代数群と関係しているわけではない。しかし以下に述べる Lusztig の結果は、これに対する強力なアンチ・テーゼを与えることになった。Chevalley 群の場合、環 R に対して群 G_R が構成され、 $R \mapsto G_R$ は可換環の圏から群の圏への関手を与える。半単純代数群 G に対しても、(スキーム論的に)よい性質をもった関手 $R \mapsto G_R$ を構成できないだろうか。この問題はすでに Chevalley [Ch5]によって取り上げられ、Kostant

[Ko] により, 半単純 Lie 環の普遍展開環の **Z**-形式との関係が議論されたが, いずれも完全な解決には至らなかった. Lusztig は[L10]において, Kostant の普遍展開環を量子群の整形式に置き換えて, 特殊化の議論を使うことにより満足すべき結果を得た. Lusztig の結果は簡約代数群の構造論における極めて重要な結果である. 証明を省略しているので, 本文ではなく附章 B で Lusztig の理論の概略を紹介したが, そこには 1 章から 4 章までのすべての話が関係してくる. 4 章で量子群の標準基底についての解説をしたことのもう一つの理由は, それが附章 B での議論に必要だったからである.

元来, 代数群の表現論と量子群の表現論が密接な関係を有することはよく知られていた. しかしこれは両者の表現の圏の同値性に関する問題であって, 決して代数群本体と量子群本体との間の関係を示すものではない. ところが Lusztig は上記の定理を証明する過程で, 標準基底を利用して, 量子群から代数群を直接構成してしまったのである. これは, いってみれば, 代数群の構造論自体が量子群によって完全に統制されることを意味している. こうなると, 代数群の教科書に量子群が登場するのも自然なことといわざるを得ない.

先にも触れたが, 表現論との関連でいえば標数 p の半単純代数群の有理表現に関する Lusztig 予想が思い起こされるだろう. Lusztig 予想は 1990 年代に, 十分大きい p に対して成立するという形で解決された. 残された問題は, Lusztig 予想が成立する p の評価を与えることであるが, これに関して近年 Williamson により, Lusztig 予想の多くの反例が構成され, 例えば $G = SL_n$ の場合, p の評価は n に関して指数関数的に増大するという驚くべき結果が報告された. くわしくは Williamson の ICM2018 での講演記録[W2]を参照されたい. 本書では代数群の表現論は扱わないが, 附章 C で Lusztig 予想の現状について簡単に述べる.

筆者は 2013 年上海の同済大学に職を得た. それ以来, 週 1 回, 2 時間半の大学院生向けの講義を 10 年にわたって続けて来た (最後の 3 年間は, コロナ禍のために^{オンライン} 在 線 講義になったが). 講義は代数群や量子群の表現論をその基礎から解説したものであるが, 内容に重複はなく, いわば 10 年間の連続講義といえるものである. このような稀有な機会を与えてくれた同済大学数学科学学院, 熱心に聴いてくれた研究者諸氏や学生諸君に心から感謝する. 本書を執筆するにあたって, この講義は大いに役に立った. 上海では, Jiachen Ye 教授, Juanjuan Sun 教授に大変お世話になった. また筆者の大学院生 Zhiping Zhou, Ying Ma とは量子群の標準基底に関する共同研究を行った. 本書の第 4 章には彼らとの研究の成果が

反映している。この機会にこれらの方々に感謝したい。

最後に、堀田良之、谷崎俊之、有木進、池田岳の諸氏には、多忙なところ初稿を通読してもらい、記述の間違い、改良等について多くの貴重なご意見をいただいた。特に谷崎氏は、本書で構成した標準基底から得られる Chevalley 群と、Chevalley 基底から得られる従来の Chevalley 群との関係について、重要な指摘を下された。また量子群についても専門的立場から有益な助言をいただくとともに、Lusztig 予想の現状についても教えていただいた。一方、有木氏は原稿を丁寧に読んで、証明を詳しくチェックして下さった。諸氏のおかげで随分と記述が改善され、読みやすくなったことと思う。ここに心からの感謝の意を表する。

本書の出版を通じて亀書房の亀井哲治郎氏には大変お世話になった。このような本を出版する機会を与えて下さった亀井氏に、この場を借りてお礼を申し上げたい。

2025 年 春

庄司俊明