改訂版　はじめに

ルベーグ測度，ルベーグ積分の教科書は数多く出版されており，本のスタイルも専門書レベルのものから，学習参考書のようなものまで多種多様です．そのような出版物の中で本書の持つ特色は，面積に関する素朴な疑問からルベーグ測度の思想的基盤に光をあて，ユークリッド空間の幾何的な議論を積み重ねることによりルベーグ測度・ルベーグ積分の理論をボトムアップに解説していることです．

この方針とは対極的なものとしては，抽象的測度論・抽象的積分論を機軸にしたものがあります．こちらは必要なものを抽象化し，ある意味洗練されたスタイルを保持しながら具体例としてルベーグ測度などを扱います．抽象論はいろいろな設定に適用可能で，汎用性が高いという大きなメリットがあります．しかし，その一方で，抽象論だけでは古典的な解析学の深い世界に立ち入ることは易しくありません．抽象的な解析学は，一時期，現代解析学，あるいはソフトアナリシスと呼ばれることがありました．これに対して抽象論では解決できず，深い解析を必要とする古典的な解析学はしばしばハードアナリシスと呼ばれています．ハードアナリシスのセンスは後から身に付けることがなかなか難しく，解析学を学ぶ初期の段階で親しんでおくことが推奨されます．本書ではユークリッド空間における集合の幾何的な考察に根ざした議論を積み重ねることにより，初学者にハードアナリシスの素地を身に付けてもらうということも意図しています．これはより進んだ実解析学の学習の準備ともなります．ハードアナリシスのセンスは偏微分方程式論，調和解析などでは有用なものです．

ところで抽象的な測度論・積分論は，古典的な理論とほとんど形式的に並行している部分も多く（そうではない重要なものも数多くありますが），本書では主に並行している部分の解説もしました．これは抽象的測度論・積分論への導入になるはずです．さらに確率論とのつながりについても触れました．

本書の内容は大きく三つの部分に分けられます．第一の部分では筆者自身がルベーグ測度とはどのようなものかを詳しく検討した結果をもとに，ルベーグ測度の仕組みを丁寧に解説しました．また，古典的実解析の素養を学べるように，ユークリッド空間の幾何に重点をおいた理論展開をしています．特にユークリッド空間の 2 進分解を初期の段階で導入してあります．ユークリッド空間の 2 進分解は現代の調和解析でも重要な役割を果たしています．

第二の部分ではルベーグ積分を学びます．ルベーグ積分の基本的な収束定理を学んだ後，フーリエ解析，偏微分方程式論などで使われるルベーグ積分に関する定理を多数解説しました．たとえば，積分と微分の交換定理，合成積（たたみ込み積），L^p $(1 \le p < \infty)$ に属する関数のコンパクト台をもつ C^∞ 関数による L^p 近似，C^1 級微分同相写像による変数変換の公式 etc. などを丁寧に解説してあります．

そして最後の部分は，ルベーグ測度では解析できない図形——本書の副題にもなっている測度 0 の図形——について解説します．そしてハウスドルフ測度やフラクタル幾何の基礎に立ち入ります．また，さらにユークリッド空間の図形の解析から離れて，確率論の世界につながる道も示します．ここでは，無限次元空間における測度が登場します．

このように本書は抽象論も見据えつつ，ユークリッド空間上の解析学に力点を置いてあります．繰り返しになりますが，本書では抽象的な数学では培うことが難しい古典的な実解析学の基本的な素地の一端も学ぶことができるでしょう．

今回の改訂内容について，主だったものを記しておきます．まず初版の考え方とストーリーはほぼ残してあります．これについてはこの「改訂版 はじめに」の末尾に掲載してある初版の「はじめに」をご覧ください．改訂したのは主に本の後半です．まずフーリエ解析や偏微分方程式論などでよく使われる有用な事項の解説を前面に押し出すように補充しました．主なものを挙げますと，初版では付録として扱っていた次の項目を大幅に書き改め本文の中に組み入れました．また証明も（微積分・線形代数の基礎知識は仮定するものの）より self-contained なものにしました．

1. L^p 関数の C_c^∞ 関数による L^p ノルム近似,

2. 微分同相写像によるルベーグ積分の変数変換の公式,

3. 抽象的な測度と積分.

特に抽象的な測度については，抽象的外測度からの測度の構成と確率論への応用など，確率論への橋渡しもしました.

なお本書が入門書であることを鑑みて，改訂にあたっては掛谷問題に関する専門に特化したいくつかの事項の解説を省きました．その分，上に述べたようなルベーグ積分に関する重要事項を盛り込みました.

そのほか，詳しくは述べませんが，証明を大幅に変えたところ，解説等を補充した箇所も複数あります.

【講義動画について】

最後に今回の改訂版のもう一つの大きな特徴を述べておきます．それは筆者による講義動画と連動している部分があることです．本書を理解するための補助となる解説や本書で触れなかった話題が学べます．本を読むだけでなく，実際の講義をオンデマンド講義の形で視聴することにより，本書の内容の理解の助けになると思います．本書と併せてご視聴ください．解説動画については，関連する動画のある章の章末に動画の URL を記してあります．また全体的な動画のリストは次の URL をご覧ください.

補助解説動画リスト（全体）
http://www.araiweb.matrix.jp/Lebesgue.html

なお本書に関する補足・訂正等は
http://www.araiweb.matrix.jp/LebesgueRev.html
に適宜載せていきます.

今回の改訂版の刊行について，日本評論社の佐藤大器さんにはいろいろとお世話になりましたことを感謝します.

2023 年 3 月

新井仁之

初版　はじめに（こちらもお読みください）

直線，平面，そして空間とは何でしょうか？ 数学では多くの場合，直線は実数全体のなす集合，平面は二つの実数の組 (x, y) 全体のなす集合，そして空間は三つの実数の組 (x, y, z) 全体のなす集合であると考えられています．これらはそれぞれ 1 次元実数空間，2 次元実数空間，3 次元実数空間とよばれています．直線，平面，空間をなぜ実数空間とみなすかというと，その根拠は直交座標を一つ定めると，たとえば平面の場合，点の位置が横軸の値 x と縦軸の値 y を用いて一意的に表せるという事実にあります．

この講義の目的は，このような実数空間内の図形の長さ，面積，体積について解説することです．ここで図形というのは，実数空間内の点の集合（点集合）のことを指します．点集合には，もちろん三角形や円など古くからなじみ深い図形もありますが，しかしもっと複雑でその図を描くことすら困難なものもあります．そのような点集合の長さ，面積，体積を測るにはどのようにすればよいか，それが本講義の主題です．

もともと実数空間内の点集合の研究は 19 世紀にドイツの数学者ゲオルグ・カントル（Georg Cantor）によって始められました．そして点集合の長さ，面積，体積はフランスのアンリ・ルベーグ（Henri Lebesgue）によって本格的に研究され，その成果は今からちょうど 100 年前の 1902 年に学位論文「積分，長さおよび面積」として発表されました．この論文でルベーグが提案した長さ，面積，体積はルベーグ測度とよばれ，今日の解析学の基礎をなしています．

本書の前半はルベーグ測度とそれをもとに定義されたルベーグ積分の解説に当てられています．この部分を読めばルベーグ測度とは何か，ルベーグ積分とはどのようなものかが理解いただけると思います．後半は主として面積が 0 でしかも長さが無限大となるような図形の大きさを測定する方法を述べます．このような図形はしばしば「病的集合」というレッテルを貼られて数学の表舞台からは葬られていました．しかし，近年フラクタル幾何学において新たな視点から脚光を浴びるようになりました．また実解析学においては，そのような図形が原因となって 1 変数関数の実解析学のいくつかの重要な定理が多変数に一般化できないこともわかってきました．この本の後半はそのような図形の

解析について詳しく述べてあります．

本書では「面積とは何だろうか」という基本的な問いかけからはじめ，ルベーグ測度，ハウスドルフ次元を解説し，さらに掛谷問題を通して現代解析学の最先端の話をとりあげました．その際，ルベーグ測度の思想を浮き彫りにするため，ジョルダン測度の定義をアレンジしてルベーグ測度と比較するなどいくつかの工夫も加えました．ここでのストーリーは，ルベーグ測度とルベーグ積分の意義を深く理解してもらうために筆者が考えたものです．

ところでこの本の原稿を用いて，「第 7 回湘南数学セミナー——高校生のための現代数学（2001 年 12 月）」で二日間の連続講義をしました．講義では定理の証明までは述べませんでしたが，ルベーグ測度，ハウスドルフ次元の意味を丁寧に解説し，面積 0 の不思議な図形たちと掛谷問題にからんだ話題を多くの動画を使って説明しました．じつはルベーグ積分を理解するためにはそれほど予備知識は必要なく，また問題意識も「図形の面積を測定するにはどうすればよいか」という素朴で単純なところにあるため，細部にこだわらなければ，高校生以下の学生でも十分理解できるテーマなのです．しかもそのテーマは現代の実解析学の最先端の話題の一端に直接的につながっています．実際本書のストーリーをもとに，京都大学における「高校生と社会人のための現代数学入門講座（2001 年 1 月）」でも講義をしましたが，幸い湘南数学セミナーでも現代数学入門講座でもおもしろかったという感想をもらうことができました．また証明をつけた形では本書のいくつかの部分を 2001 年から 2002 年にかけて東京大学で講義しました．

この本は大学生むけのルベーグ積分の独習書あるいは講義のテキスト，参考書として書かれていますが，このほかに数学に興味のある高校生の参考書としても利用できるのではないかと思います．

ところで本書の原案は『数学のたのしみ』11 号（1999 年，日本評論社）に掲載された拙稿『測度』にあります．拙稿『測度』をもとに本を執筆するという企画は日本評論社の横山伸さんからの提案でした．それがなければ本書を書くことはなかったに違いありません．この場を借りて感謝の意を表したいと思います．

最後になりますが本書の図版を作製し，著者校正も手伝ってくれた新井しのぶに感謝いたします．図版作製には MATLAB® と Adobe® Illustrator® を使いました．

2002 年 11 月

新井仁之

第I部
面積とは何か

第 1 章

素朴な面積の理論（ルベーグ以前）

私たちは日常，『長さ』，『面積』，『体積』といった言葉を何気なく使い，実際に長さ，面積，体積の計算もしています．たとえば，

長方形の面積は，“縦” $\times$ “横”，
三角形の面積は，“底辺” $\times$ “高さ” $\div\ 2$，
円の面積は，“半径” $\times$ “半径” $\times\ \pi$

のようにです．

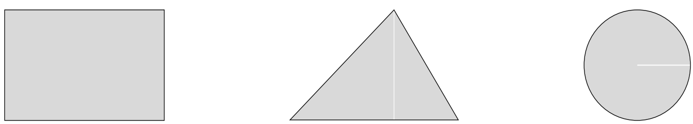

図 1.1　長方形・三角形・円

しかし，そもそも長さ，面積，体積とは一体何なのでしょうか？ 一般の図形に対して長さ，面積，体積はどのように定義されているのでしょうか？

この講義では，このへんの話からはじめることにします．まずは「面積」について述べ，「長さ」と「体積」については後で話すことにしたいと思います．

普段私たちは「面積」をどのような意味の言葉として使っているでしょう．国語辞典を調べてみると次のように書かれています．

> “一定の面の広さ。閉曲線で囲まれた平面・曲面などの広さを表す数値。(広辞苑, 第 5 版)”[1)]

確かに，面積といわれたとき私たちに思い浮かぶものは「広さを表す数値」です．この部屋の広さは 30 平方メートルだとか，この土地は 100 坪あるといったように面積は日常的には広さを表す量として使っています．しかし，これで面積が完全に定義されているかというと，そうでもありません．国語辞典では「広さを表す数値」といっていますが，「広さ」とは一体何なのでしょうか？

もう一度国語辞典をひいてみることにしましょう．広さとは,

> “広いこと．また，広いか狭いかの程度．面積．（広辞苑, 第 5 版）”

とでています．ここで「面積」という言葉に戻ってきてしまいました．このように，日常的には，面積という言葉は大分あいまいに使われているようです．

それでは面積（あるいは長さ，体積）は数学として厳密にはどのように定義されているのでしょうか？ これが本講義のメインテーマです．

1.1　ジョルダンによる面積の定義

古代よりさまざまな図形の面積を計算する研究が行われていました．しかし一般の図形に対して面積を定義するという目的意識をもって，面積の研究が始められたのは 19 世紀になってからのことです．そして今日面積の定義として広く認められているものは，20 世紀になってフランスの数学者アンリ・ルベーグによって考えられました．第 I 部ではルベーグによる面積の理論を詳しく解説していきたいと思います．

はじめに，ルベーグ以前の 19 世紀における面積の研究がどのようなものであったのかを振り返っておきましょう．19 世紀に面積の一般的な理論の研究

[1)] 本講義初版出版時（2003 年）に参照した第 5 版ではこのようになっていたが，2008 年に出版された広辞苑，第 6 版では「一定の面の広さ。閉曲線で囲まれた平面・曲面などの広さを表す数値。厳密には定積分により定義する。」のように追記があった.

にたずさわった数学者は何人かいます．たとえばドイツの数学者 H. ハンケル，G. カントル，またフランスでは E. ボレル, C. ジョルダンといった人達です．この中で面積に関するもっとも完成度の高い理論を考えたのはジョルダンだと思われます．ここではジョルダンによる面積の定義を紹介することにしましょう．ジョルダンの考え方は，私たちが実際に行ってきた「面積」の測定方法を素直に数学化したものといえます．

なおこの講義では，もともとのジョルダンの定義の仕方を少し変えて，若干まわりくどいやり方で定義します．おそらくその方が面積の定義の手順がより鮮明に浮き彫りになり，ルベーグの定義との違いが明確になるからです．後で示されるように，ここでの定義とジョルダンの定義とは同値になっています（付録 F 参照）．

1.1.1　面積はどうやって測定するか？

これから紹介するジョルダンによる面積の定義[2)]は，人々が普段面積を測定するために行ってきた行為をそのまま数学の言葉で書き表したものといえます．

ある二つの形の異なる土地があって，この二つの土地のどちらが広いかを調べるとき，私たちはどのような方法をとってきたでしょうか？

図 1.2　どれが広い？

一つの方法は，たとえば一辺の長さが 1 メートルの正方形の板をそれぞれの土地の上に敷き詰めていき，どちらが多くの枚数を敷けるかによって土地の広さを比較することでしょう．

もし図 1.3（左の図）のように板が 10 枚敷ければ 10 平方メートル，図 1.3（中央の図）のように 12 枚敷ければ 12 平方メートルと数えます．また，図

2) 正確にはジョルダンの方法をアレンジしたもの．

1.3（右の図）のように 10 枚丁度は敷けないものの，9 枚と一辺の長さが 0.5 メートルの板が 1 枚敷けるときには，9.25 平方メートルと数えます．なぜ 9.5 平方メートルではなく，9.25 平方メートルとするかというと，一辺の長さ 1 メートルの正方形の中には一辺の長さが 0.5 メートルの板を 4 枚敷けるからです．つまり一辺 0.5 メートルの板は

$$1\,(\text{平方メートル}) \div 4 = 0.25\,(\text{平方メートル})$$

とするのです．このような方法で土地の広さを数で表したものが，その**土地の面積**といわれているものです．

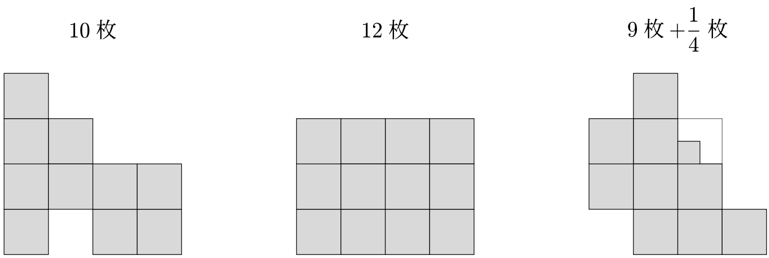

図 **1.3**　土地の面積

この考え方を一般的な図形に適用したものが，ジョルダンによる面積の定義です．

練習問題

問題 1.1　上記の考えに基づいて，一辺の長さが $1/n$ メートルの正方形の土地の面積を求めよ．ただし n は正の整数．

1.1.2　ジョルダンによる面積の定義

準備（図形に関する記号と定義)

平面上の図形に関するいくつかの約束をしておきましょう．

平面に直交座標系を一つ定めると，平面上の点 $\boldsymbol{x}$ はこの座標系を使って，二

つの実数の組 (x_1, x_2) によって表すことができます．本書では最初に座標系を一つ定め，それは固定しておくことにします．

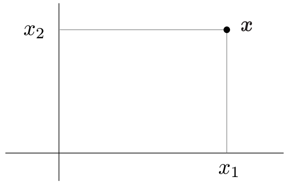

図 1.4　平面上の点

よく使う記号ですが，

$$\mathbb{R} = \{\text{ 実数全体 }\}$$

と表すことにします．また

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R},\, x_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \in \mathbb{R},\, x_2 \in \mathbb{R},\, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

とします．$\mathbb{R}$ は 1 **次元実数空間**とよばれ，$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ はそれぞれ 2 **次元実数空間**，3 **次元実数空間**とよばれています．ところでこれまであいまいに「図形」という言葉を用いてきましたが，図形の定義もしておかねばなりません．この講義では「図形」を次のように定義します．

定義 1.1　$\mathbb{R}^2$ 内の点の集合を $\mathbb{R}^2$ 内の**図形**あるいは**平面図形**という．同様に，$\mathbb{R}^d$ $(d = 1, 3)$ 内の点の集合を $\mathbb{R}^d$ 内の**図形**という．$\mathbb{R}^3$ 内の図形を**空間図形**という．

たとえば

$$\{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1,\ 1 \le x_2 \le 2\},$$
$$\{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1,\ x_2 = 1\},$$
$$\left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le 4\right\}$$

などは $\mathbb{R}^2$ 内の図形です．この他にたとえば

$$\{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) = (0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$$

も $\mathbb{R}^2$ の点の集合なので $\mathbb{R}^2$ 内の図形の一つと考えます.

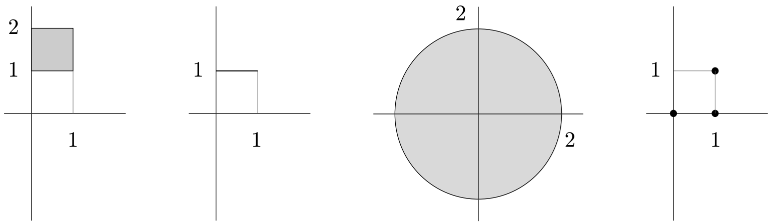

図 1.5　$\mathbb{R}^2$ 内の図形

この節ではおもに 2 次元実数空間内の図形に焦点をあて，ジョルダンによる面積の理論を紹介したいと思います．ジョルダンによる面積の定義では，特に次の図形が基本的な役割を果たします.

定義 1.2　$a, b \in \mathbb{R}, l_1, l_2 > 0$ とする.

$$\{(x_1, x_2) : a \leq x_1 < a + l_1,\ b \leq x_2 < b + l_2\}$$

を**基本長方形**といい[3]，$[a, a + l_1) \times [b, b + l_2)$ と表します．特に

$$l_1 = l_2 = l$$

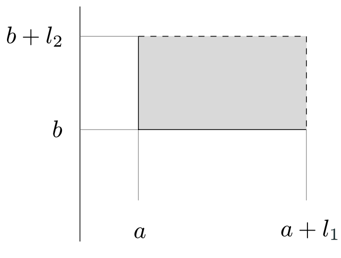

図 1.6　基本長方形

[3] すなわち各辺が座標軸に平行な長方形のことです．基本長方形というのは，座標軸と平行でない辺をもつ長方形と区別するために便宜上本書で名づけた造語で，一般的なものではありません.

であるとき**基本正方形**，あるいは**一辺が** l **の基本正方形**ということにします．

二つの図形 A, B に対して，

$$A \cup B = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in A \text{ または } (x_1, x_2) \in B\}$$

とし，これを A と B の**合併**あるいは**和**といいます．また

$$A \cap B = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in A \text{ かつ } (x_1, x_2) \in B\}$$

を A と B の**共通部分**，あるいは **交わり**といいます．

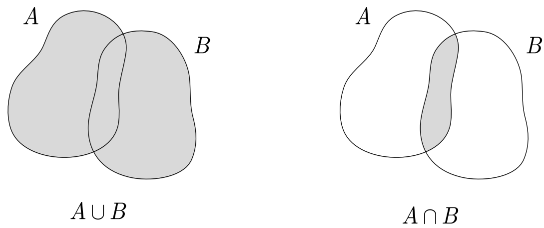

図 1.7　合併と共通部分

合併と共通部分は，一般に有限個の図形に対して次のように定義されます．

定義 1.3　$A_1, A_2, \cdots, A_n$ を n 個の図形とする．このとき，

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \text{ は } A_1, \cdots, A_n \text{のいずれかに属する }\}$$

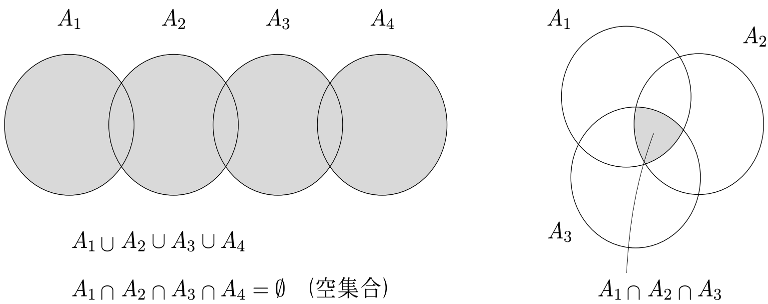

図 1.8　有限個の図形の合併と共通部分

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \text{ はすべての } A_1, \cdots, A_n \text{ に属する }\}$$

とする．

1.1.2.1　ジョルダンによる面積

$\mathbb{R}^2$ 内の図形の面積を定めていきましょう．まず，一辺が l の基本正方形 $Q = \{(x_1, x_2) : a \leq x_1 < a + l,\ b \leq x_2 < b + l\}$ に対して，

$$|Q| = l^2 \tag{1.1}$$

とおき，これを Q の面積ということにします．

ここで注意すべきことは，面積の定義がすでにあって，それにあてはめると基本正方形の面積が（1.1）として求まるというのではなく，基本正方形の面積を（1.1）によって定義するということです．

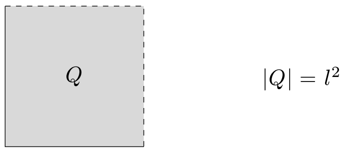

図 1.9　Q の面積

ところで，第 1.1.1 節で土地の面積には「平方メートル」という単位がついていました．しかしこれからはこのような単位をつけることはしません．一般に現実の世界では，数に単位がついていることがほとんどです．たとえば，1 個だとか 2 匹のように，何を数えるかによりいろいろな単位がついてきます．しかし数学では，このようなことを超越して，数には単位をつけず 1 であるとか 2 であるというように数字だけを扱います．これと同じで，数学では面積に対しても単位をつけることはしません．

さて基本正方形の面積をもとに，より一般の図形の面積を定めていくことにしましょう．$\mathbb{R}^2$ 内の有界な図形 A を考えます．**有界な図形**とは，十分大きな基本正方形 Q によって A を囲うことができるような図形のこととします．

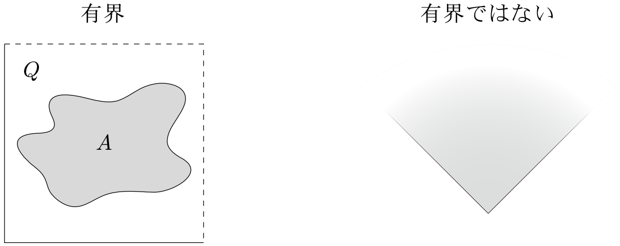

図 1.10　有界な図形

いま，ある有界な図形 A が与えられているとします．この A の中に 一辺が ε の基本正方形を重なり合わないように敷きます．A が小さい図形の場合，一辺が ε の基本正方形を一つも入れることができないこともありますが，その場合については後で議論することにして，とりあえず一辺 ε の基本正方形を少なくとも一つ以上入れることができる場合を考えます．この場合，一般には一辺 ε の基本正方形を A 内に敷く敷き方はいろいろありえますが，その中でもっとも多くの枚数を敷ける敷き方を考え，そのときの一辺 ε の基本正方形の面積の総和を

$$c_\varepsilon(A)$$

とおきます．

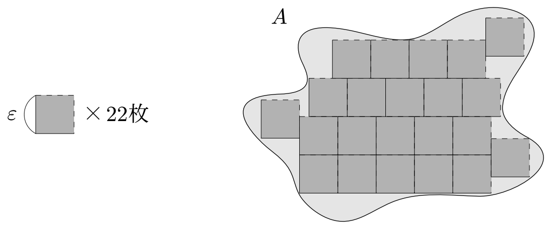

図 1.11　一辺が ε の正方形を敷き詰める

もし A の中に一枚も一辺 ε の基本正方形を入れることができない場合は，便宜上

$$c_\varepsilon(A) = 0$$

とおきます．

さて，図形 A が単純な形をしていて，ある ε に対して一辺 ε の基本正方形で隙間なく敷き詰めることができれば，$c_\varepsilon(A)$ を A の面積と考えることができます．しかし，一般には一辺 ε の基本正方形をどんなに工夫して敷き詰めても，どうしても隙間が現れてしまうことがあります（図 1.11 参照）．

そこで，そのような場合には ε よりもさらに小さな基本正方形で敷き詰めることを考えます．たとえば $\varepsilon/2$ の基本正方形で敷き詰めると，ε のときに比べてより隙間を少なくすることができます（図 1.12 参照）．

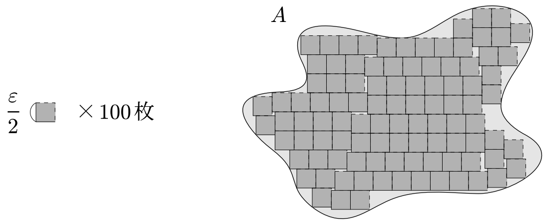

図 1.12　一辺が $\dfrac{\varepsilon}{2}$ の正方形を敷き詰める

このようなことから，ε としてさまざまな小さい数をとって $c_\varepsilon(A)$ を計算し，その中で隙間がもっとも少なくなるもの，いいかえれば $c_\varepsilon(A)$ がもっとも大きくなるものを考えます．正確には

$$c(A) = \sup_{\varepsilon>0} c_\varepsilon(A)$$

（ここで sup は上限を表す記号[4]）を考えれば，これが A の面積をもっとも良く近似している値になっていることが期待されます．この講義では $c(A)$ を A の**ジョルダン内容量**とよぶことにします．

ところで，$c(A)$ は一見すると面積の定義としてふさわしいもののように思えますが，しかし必ずしもそうとはいえません．というのは，これによって本

[4] 本書を通して，上限ならびに後出の下限という概念はひんぱんに使います．まだこれらについて学んだことのない人は，微積分の本ないしは本書の付録 A で予備知識をつけておいてください．

当に隙間なく面積を測定できているかどうか保証されていないからです.

そこで隙間なく面積を測定できているかどうかを知るために，ジョルダン外容量とよばれる量を使います．ジョルダン外容量は次のように定義されます．まず有限個の一辺 ε の基本正方形により A を覆います．たとえば

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N} Q_j, \quad Q_j \text{は一辺} \varepsilon \text{の基本正方形}$$

とします．このとき，基本正方形は重なり合っていてもかまわないこととします．一辺 ε の基本正方形を使って A を覆う覆い方にはいろいろあり，覆い方によっては，使った一辺 ε の基本正方形の面積の総和も変わってきます．そこで，A を被覆するのに使われた一辺 ε の基本正方形の面積の総和のうち，もっとも小さい値を $C_\varepsilon(A)$ とします．さらに

$$C(A) = \inf_{\varepsilon > 0} C_\varepsilon(A)$$

（ここで inf は下限を表す記号（付録 A 参照））とおきます．これを A の**ジョルダン外容量**ということにします．$\varepsilon, \varepsilon' > 0$ に対して

$$c_\varepsilon(A) \leq C_{\varepsilon'}(A)$$

であるので，ε' に関する下限をとれば，$c_\varepsilon(A) \leq C(A)$．したがって

$$c(A) \leq C(A)$$

が成り立つことがわかります.

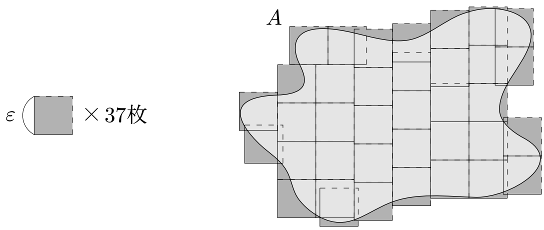

図 1.13　ジョルダン外容量

さて，私たちはまだ「面積」を定義していませんが，私たちが何となく持っ

ている「面積」のイメージからすると，

$$c(A) \leq \text{“}A\text{ の面積”} \leq C(A)$$

であると思うことはそれほど不自然なことではないでしょう．したがって，もしも

$$c(A) = C(A)$$

が成り立っていれば，この共通の値を A の面積と定義することは自然な定義のように思えます．またこのときには，$c(A)$ が隙間なく A の面積を測り尽くしているともいえます．

そこで次の定義をします．

定義 1.4　有界な図形 $A \subset \mathbb{R}^2$ が

$$c(A) = C(A)$$

をみたすとき，A は**ジョルダンの意味で面積が測定可能**（あるいは**ジョルダン可測**）であるといい，

$$J(A) = c(A) = C(A)$$

を A の**ジョルダンの意味の面積**という．

1.2　ジョルダンの意味で面積が測定できない図形

ジョルダンの意味で面積が測定できる図形は，たくさんあります．しかし，測定不可能な図形もかなりあります．この講義の目的はジョルダンの意味の面積の理論を改良したルベーグの理論を紹介することなので，ここではジョルダンの意味で面積が測定できない図形の例を二つほどあげることにします．一つはぎっしり詰まっているようでスカスカの集合です．

例 1.5　$\mathbb{Q}$ を有理数全体のなす集合とし，

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1,\, x_2 \in \mathbb{Q},\ 0 \leq x_i < 1\ (i = 1, 2)\}$$

とおく．このとき，A はジョルダンの意味で面積の測定できない図形である．

証明　まず，A の中にはどのように小さな空でない基本正方形も入れられないことに注意してください．なぜならどのような基本正方形

$$[a, a+l) \times [b, b+l)$$

も必ず無理点を含んでしまうからです．したがって，$c(A) = 0$ です．

一方，A を覆う基本正方形として $I = [0,1) \times [0,1)$ が考えられますが，これより小さな正方形では A は覆えません．また複数の基本正方形の合併によって $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ となるようにすると $I \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ となるので，容易に

$$|I| \leq \sum_{j=1}^{n} |I_j|$$

となることがわかります．したがって，$C(A) = |I| = 1$ が成り立ち，

$$0 = c(A) < C(A) = 1$$

となってしまいます．よって A はジョルダンの意味で面積が測定可能ではありません．■

もう一つジョルダンの意味で面積の測定できない図形を紹介しておきたいと思います．2 次元ハルナック集合とよばれる図形です．これは次のような幾何的な操作を繰り返して得られるものです．まず

$$H_0 = [0,1] \times [0,1]$$

とおきます．次に H_0 から図 1.14 のように幅 4^{-1} の十字の帯を抜き取り，残ったものを H_1 とおきます．ここで用語を一つ定めておきましょう．これから先

$$[a, a+l] \times [b, b+l]$$

の形の図形を基本閉正方形とよぶことにします．

H_1 は一辺が $(1 - 1/4)/2 = 3/8$ の 4 個の基本閉正方形からできています．さらに H_1 を構成する各小正方形から図のように幅 4^{-2} の十字の帯を抜き取

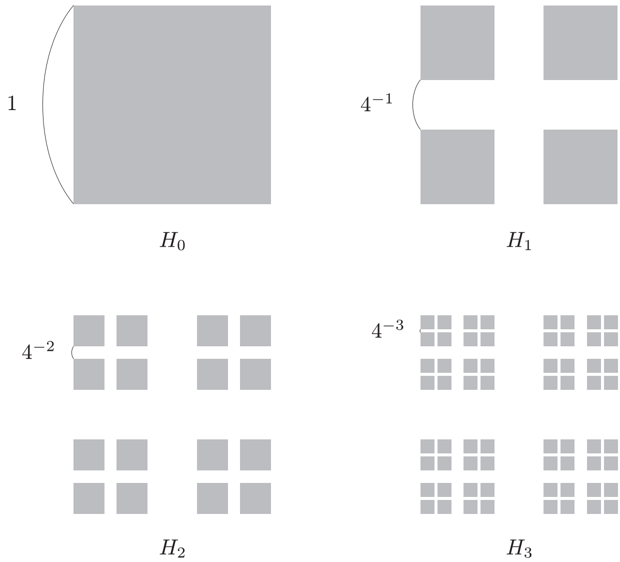

図 1.14　ハルナック集合

り，残ったものを H_2 とおきます．H_2 は一辺の長さ $(1-1/4-2/4^2)/2^2$ の 4^2 個の基本閉正方形からなっています．さらにこの小正方形から幅 4^{-3} の十字の帯を抜き取った図形を H_3 とおきます．H_3 は一辺の長さ $(1-1/4-2/4^2-2^2/4^3)/2^3$ の 4^3 個の基本閉正方形からなっています．このような操作を続け，$H_1, H_2, H_3, H_4, \cdots$ と作り続けていきます．

そして最後に

$$H = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n \tag{1.2}$$

とおきます．ただしここで，$\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} H_n$ はすべての H_n に含まれているような点の集合，すなわち

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} H_n = \{x : \text{すべての } n \text{ に対して } x \in H_n\}$$

とします．これを 2 **次元ハルナック集合**といいます．

例 1.6　(1.2) で定義した H はジョルダンの意味で面積が測定できない.

証明　まず各 H_n は一辺

$$\left(1-\frac{1}{4}-\frac{2}{4^2}-\frac{2^2}{4^3}-\cdots-\frac{2^{n-1}}{4^n}\right)\frac{1}{2^n}$$

の基本正方形 4^n 個を含んでいます.

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{4}-\frac{2}{4^2}-\frac{2^2}{4^3}-\cdots-\frac{2^{n-1}}{4^n}\right)\frac{1}{2^n}\\&=\left\{1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\right\}\frac{1}{2^n}\\&=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\end{aligned}$$

より, H_n のジョルダンの意味での面積は

$$C(H_n)\geq\left\{\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right\}^2\times 4^n=\frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$$

です. したがって

$$C(H_n)\geq\frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$$

です. 後で証明する定理等から

$$C(H)\geq\lim_{n\to\infty}C(H_n)=\frac{1}{4}$$

となることがわかります（注意 1.1 参照）. ところが, H はどのような小さな正方形も含み得ないので, $c(H)=0$ となります. よって H はジョルダンの意味で面積が測定できない図形であることがわかります. ■

注意 1.1　たとえば後述の定理 3.5 および例 4.6 の証明よりを用いると,

$$C(H)\geq m(H)=\frac{1}{4}$$

が示せます.

【補助動画案内】

http://www.araiweb.matrix.jp/Lebesgue2/LebesgueMeasure.html

イメージがわかるルベーグ測度入門（ルベーグ測度の意味徹底解剖）

本章から第 4 章まで，ルベーグ積分の意味を徹底解剖してあります．概略を知りたい方は上記の動画をご覧いただくとよいでしょう．また復習として視聴することも可能です.

第 2 章

ルベーグの意味の面積

前章で紹介したジョルダンによる面積の定義は，すべての図形に対して面積を定義できたわけではありませんが，ごく自然な発想に基づくものだったといえましょう．ルベーグはジョルダンの考え方をさらに改良して，より多くの図形に対して面積を定義できるようにしました．一体どのようにジョルダンの定義を変えたのでしょうか？ 本章ではルベーグの方法によって定義された面積とはどのようなものかを述べたいと思います．

2.1 有限の世界と無限の世界

まず前章で述べたジョルダンの意味の面積の定義が，おおよそどのような発想に基づいたかを簡単に振り返っておきましょう．複雑な図形 $A \subset \mathbb{R}^2$ が与えられたとします．この面積を測定するため，まず A に細かい砂粒（ただしそれは正方形をしているものとします）を敷き詰めます．次にそれを全部回収して今度は底辺が a の長方形の図形に敷き詰め直します．そして砂粒が高さ b のところまで敷き詰められたとき，A の面積を ab とするのです．

ところで，立体図形の場合の話になってしまいますが，たとえば複雑な形をした壺があったとき，この壺の容積をどのようにして量るでしょうか？ おそらく砂粒を壺の中に入れて測定する人はあまりいないでしょう．多くの人は，砂粒ではなく水を使うと思います．実際，この方が砂粒で測るよりも誤差が少なくなります．しかしながら，これまで述べてきたことからわかるようにジョ

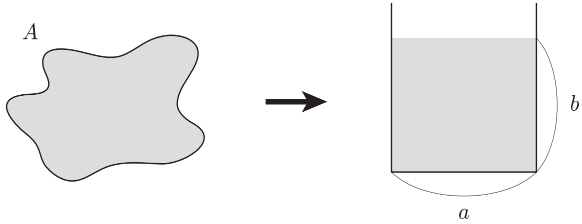

図 2.1　砂粒を敷き詰める

ルダンの方法は砂粒を使った測定方法であるといえます．これに対して，これから紹介するルベーグの方法は水を使った方法にかなり近いものになっているのです．ここで近いと断わっているのは，じつは水のような連続体を用いて面積を測定する理論は現在のところできておらず，正確にはルベーグのアイデアは砂粒よりは細かいが，連続体よりは粗いもので面積を測定するというものだからです．それでもルベーグの方法はジョルダンのものに比べて面積の研究に革新的な進歩をもたらしました．

ルベーグのアイデアをもう少し詳しく説明しておきましょう．そのため，くどいようですがジョルダンの意味の面積の考え方を今度はもう少し別の視点から見直しておきます．

架空の話ですが，「ε の世界」という世界があるとします．この世界では，人々は一辺が $\varepsilon > 0$ の正方形より小さい図形を作ることはできません．「ε の世界」の図形は一辺が ε の正方形を最小の構成単位として作られているのです．

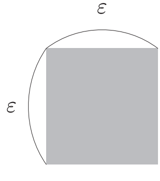

図 2.2　ε の世界 ― これ以上小さい図形は作れない

この「ε の世界」に私たちが考えた複雑な図形 A をもっていって面積を測定してもらいます．すると「ε の世界」の人達は一辺が ε の正方形を使って A

の面積を測定しようとします．しかし，どうしても測定した面積には誤差がでてきてしまいます．

そこで，次に一辺 $\varepsilon/2$ の正方形を作れる「$\varepsilon/2$ の世界」を訪ね，そこで A の面積を測定してもらいます．ここでは一辺 $\varepsilon/2$ の正方形を使って面積を測るので，「ε の世界」での測定値よりは測定誤差が小さくなりますが，やはり測定誤差がでてきてしまいます．

さらに，さまざまな「ε の世界」を訪ねて，図形 A の面積を測定してもらいます．そして，その中でもっとも良い測定値を A の面積とします．これが大雑把にいってジョルダン流の面積の測定方法です．

これに対して，ルベーグはいきなりどんな小さな正方形でも作れる「無限の世界」を訪れます．

図 2.3　無限の世界—任意の大きさの正方形を作れる

この世界では，様々な大きさの正方形を無限個使って面積を測ることができます．つまり，無限個の正方形を使って A を覆ったりすることができるのです．「無限の世界」の住人は，無限枚のいくらでも小さな正方形のタイルを並べることができるのですから，とんでもない超能力をもっているといえなくもありません．

しかし，ともかくこういう「無限の世界」を想定して，その世界での面積の測定に基づいて面積を定義するというのが，ルベーグのだいたいのアイデアです．（じつはこれ以外にももう一つアイデアがあるのですが，それについては次節で触れることにします．）

以上述べたことを，数学的に記述したものがルベーグによる面積の定義です．

第Ⅱ部

ルベーグ積分

第 I 部で学んだルベーグ測度を使ってルベーグ積分の定義をします．それからルベーグ積分の便利な性質を証明し，さらに具体的な応用例も述べます．ルベーグ積分がいかに便利なものであるかを見ていくことにしましょう．この章では第 6 章で述べた，d 次元ルベーグ測度をもとに記述されていますが，もちろん $d = 2$ として読み進んでもかまいません．

第 7 章

ルベーグ可測関数

ルベーグ積分は，ルベーグ可測関数とよばれる関数に対して定義されます．本章では，ルベーグ可測関数の定義およびその基本的な性質について学びます．

7.1　ルベーグ可測関数の定義と性質

はじめに連続関数の定義を復習しておきましょう．この講義では，$\mathbb{R}^d$ の開集合全体のなす族を $\mathcal{O}_d$ によって表すことにします．また $E \subset \mathbb{R}^d$ に対して，$U \subset E$ が E の**相対的開集合**であるとは，ある $U' \in \mathcal{O}_d$ が存在し $U = U' \cap E$ と表せることです．E の相対的開集合全体のなす集合族を $\mathcal{O}_E$ と表します．

定義 7.1　$\mathbb{R}^d \supset E$ とする．E 上の実数値関数 $f(x)$ が E 上で連続であるとは，任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}$ に対して

$$f^{-1}(G) = \{x : x \in E,\, f(x) \in G\} \in \mathcal{O}_E$$

となることである．（問題 7.2 参照）

これに対して，**ルベーグ可測関数**は次のように定義されます．

定義 7.2　$E \subset \mathbb{R}^d$ をルベーグ可測集合とする．E から $[-\infty, \infty]$ への関数 $f(x)$ がルベーグ可測であるとは，任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}$ に対して

$$f^{-1}(G) = \{x : x \in E,\, f(x) \in G\} \in \mathfrak{M}_d$$

かつ

$$\{x : x \in E,\, f(x) = \infty\},\, \{x : x \in E,\, f(x) = -\infty\} \in \mathfrak{M}_d$$

となることである．また E から $\mathbb{C}$ への関数 $f(x)$ がルベーグ可測であるとは，その実部 $\mathrm{Re}\, f(x)$ および虚部 $\mathrm{Im}\, f(x)$ がルベーグ可測であることと定義する．なお本書ではルベーグ可測関数のことを省略して単に**可測関数**とよぶこともある．

図 7.1　$f^{-1}(G)$ のイメージ図

この講義では，関数 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ に値をとる場合，**実数値関数**であるといい，$[0, +\infty]$ に値をとる場合，**非負値関数**であるということにします．また $\mathbb{C}$ に値をとる関数を**複素数値関数**といいます．なお特に断らない場合，関数は $[-\infty, \infty]$ に値をとるか，あるいは複素数値関数のいずれかであるとします．

開集合はルベーグ可測集合であり，二つのルベーグ可測集合の共通部分はルベーグ可測なので次のことが成り立ちます．

命題 7.3　$\mathbb{R}^d$ のルベーグ可測部分集合上の複素数値連続関数はルベーグ可測関数である．

不連続なルベーグ可測関数もあります．その例を一つあげておきましょう．これは**特性関数**とよばれるもので，ルベーグ積分において基本的な役割を果たします．

定義 7.4　$A \subset \mathbb{R}^d$ をルベーグ可測集合とする．このとき，

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

を A の**特性関数**という.

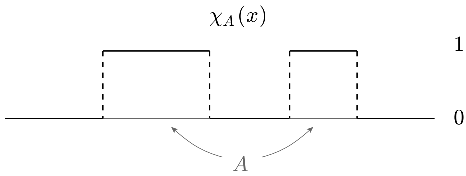

図 7.2　A の特性関数

命題 7.5　ルベーグ可測集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ の特性関数 χ_A はルベーグ可測関数である.

証明　$G \subset \mathbb{R}$ を開集合とします. このとき

$$1 \in G,\ 0 \in G \text{ であれば } \{x : \chi_A(x) \in G\} = \mathbb{R}^d,$$

$$1 \in G,\ 0 \notin G \text{ であれば } \{x : \chi_A(x) \in G\} = A,$$

$$1 \notin G,\ 0 \in G \text{ であれば } \{x : \chi_A(x) \in G\} = A^c,$$

$$1 \notin G,\ 0 \notin G \text{ であれば } \{x : \chi_A(x) \in G\} = \varnothing.$$

したがってどの場合でも $\{x : \chi_A(x) \in G\} \in \mathfrak{M}_d$ です. また明らかに

$$\{x : \chi_A(x) = \infty\} = \{x : \chi_A(x) = -\infty\} = \varnothing \in \mathfrak{M}_d$$

でもあります. ■

ルベーグ可測関数の定義から次のことがわかります.

命題 7.6　$f(x)$ がルベーグ可測集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上の $[-\infty, \infty]$ に値をとる関数とする. このとき, 次の (1) ～ (4) は互いに同値である.

(1)　$f(x)$ はルベーグ可測である.

（2）　任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{x : x \in E,\ f(x) > a\} \in \mathfrak{M}_d.$$

（3）　任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{x : x \in E,\ f(x) \geq a\} \in \mathfrak{M}_d.$$

（4）　任意の $-\infty < a < b < \infty$ に対して

$$\{x : x \in E,\ a \leq f(x) < b\} \in \mathfrak{M}_d$$

かつ

$$\{x : x \in E,\ f(x) = \infty\},\ \{x : x \in E,\ f(x) = -\infty\} \in \mathfrak{M}_d.$$

証明をする前に，記述を簡単にするため，次のような略記法を導入しておきましょう．

$$\{f > a\} = \{x : x \in E,\ f(x) > a\},$$

$$\{f \geq a\} = \{x : x \in E,\ f(x) \geq a\},$$

$$\{f = \infty\} = \{x : x \in E,\ f(x) = \infty\},$$

$$\{f \in G\} = \{x : x \in E, f(x) \in G\} \quad \text{etc}$$

この略号はこれから先，本講義で使うことにします．

証明　（1）$\Rightarrow$（2）：(a, ∞) は $\mathbb{R}$ の開集合ですから，$A = \{f \in (a, \infty)\} \in \mathfrak{M}_d$ が成り立ちます．したがって

$$\{f > a\} = A \cup \{\, f = \infty\} \in \mathfrak{M}_d.$$

（2）$\Rightarrow$（3）：$F_n = \left\{f > a - \dfrac{1}{n}\right\}$ とおくと（2）より $F_n \in \mathfrak{M}_d$ なので

$$\{f \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathfrak{M}_d$$

となります．

(3) ⇒ (4)：$\{a \leq f < b\} = \{f \geq a\} \cap \{f \geq b\}^c$ および定理 4.1 より，$\{\, a \leq f \ \ < b\} \in \mathfrak{M}_d$ です．また

$$\{f = \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f \geq n\} \in \mathfrak{M}_d, \quad \{f = -\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f \geq -n\}^c \in \mathfrak{M}_d.$$

(4) ⇒ (1)：任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}$ は互いに交わらない 2 進区間 $I_j = [a_j, b_j)$ によって $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ と表せます（定理 3.14 参照．この定理では 2 進正方形に対して証明されていますが，区間の場合も同様に示せます）．したがって

$$\{f \in G\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{f \in I_j\} \in \mathfrak{M}_d$$

です．■

命題 7.7　$f(x)$, $g(x)$ をルベーグ可測集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上の $[-\infty, \infty]$ に値をとるルベーグ可測関数とする．このとき，

$$\{\, f > g\} \ (= \{x : x \in E,\, f(x) > g(x)\}),$$
$$\{\, f \geq g\}, \{\, f = g\}$$

はルベーグ可測集合である．

証明　$\mathbb{Q}$ を有理数全体のなす集合とすると

$$\{f > g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > r\} \cap \{r > g\})$$

です．したがって命題 7.6 と 定理 4.1 よりこの集合はルベーグ可測集合であることがわかります．また

$$\begin{aligned}\{f \geq g\} &= \{g = \infty,\, f \geq g\} \cup \{g \in \mathbb{R},\, f \geq g\} \cup \{g = -\infty,\, f \geq g\} \\ &= (\{f = \infty\} \cap \{g = \infty\}) \cup \left(\{g \in \mathbb{R}\} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > g - 1/n\}\right) \\ &\quad \cup \{g = -\infty\}.\end{aligned}$$

したがって $\{f \geq g\} \in \mathfrak{M}_d$ が得られます．これより

$$\{f = g\} = \{f \geq g\} \setminus \{f > g\} \in \mathfrak{M}_d$$

です．■

命題 7.8　$f(x), g(x)$ をルベーグ可測集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上のルベーグ可測関数で，$f(x), g(x)$ ともに非負値関数であるかあるいは $\mathbb{R}$ に値をとる関数であるとする．このとき

$$f(x) + g(x),\ f(x)g(x),\ cf(x) \tag{7.1}$$

（ただし c は実数）は E 上のルベーグ可測関数である．

証明　実数 a に対して

$$\begin{aligned}\{f+g>a\} &= (\{f+g>a\} \cap \{f=\infty\}) \cup (\{f+g>a\} \cap \{g=\infty\}) \\ &\quad \cup (\{f+g>a\} \cap \{f,g \in \mathbb{R}\}) \\ &= \{f=\infty\} \cup \{g=\infty\} \cup \{f,g \in \mathbb{R}, f > a-g\}.\end{aligned}$$

$\{f=\infty\}, \{g=\infty\} \in \mathfrak{M}_d$ であり，また

$$\begin{aligned}\{f,g \in \mathbb{R}, f > a-g\} &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f,g \in \mathbb{R}\} \cap \{f > r\} \cap \{r > a-g\}) \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f,g \in \mathbb{R}\} \cap \{f > r\} \cap \{g > a-r\}) \\ &= \{f \in \mathbb{R}\} \cap \{g \in \mathbb{R}\} \cap \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > r\} \cap \{g > a-r\}) \\ &\in \mathfrak{M}_d\end{aligned}$$

です．したがって，命題 7.7 より $f(x)+g(x)$ はルベーグ可測であることがわかります．

実数 a をとります．$a \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\{fg>a\} &= (\{fg>a\} \cap \{f=\infty\}) \cup (\{fg>a\} \cap \{g=\infty\}) \\ &\quad \cup (\{f,g \in \mathbb{R}, fg>a\})\end{aligned}$$

$$= (\{g>0\}\cap\{f=\infty\})\cup(\{f>0\}\cap\{g=\infty\})$$
$$\cup\{f,g\in\mathbb{R}, fg>a\}$$

です．ここで $\{f>0\}, \{g>0\}, \{f=\infty\}, \{g=\infty\}\in\mathfrak{M}_d$ であり，また $a\geq 0$ より

$$\begin{aligned}&\{f,g\in\mathbb{R}, fg>a\}\\&=\{f,g\in\mathbb{R}\}\cap\left(\left\{g>0,\ f>\frac{a}{g}\right\}\cup\left\{g<0,\ f<\frac{a}{g}\right\}\right)\\&=\{f,g\in\mathbb{R}\}\cap\\&\quad\left(\bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\r>0}}\left(\left\{g>\frac{a}{r}\right\}\cap\{f>r\}\right)\cup\bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\r>0}}\left(\left\{g<-\frac{a}{r}\right\}\cap\{f<-r\}\right)\right).\end{aligned}$$

したがって，$\{fg>a\}\in\mathfrak{M}_d$ です．$a<0$ の場合は

$$\{fg>a\}=\{f\neq 0,\ g\neq 0,\ fg>a\}\cup\{f=0\}\cup\{g=0\}$$

であり，$\{f\neq 0,\ g\neq 0,\ fg>a\}$ は $a\geq 0$ の場合と同様にして $\mathfrak{M}_d$ に属することが示せます．$\{f=0\}, \{g=0\}\in\mathfrak{M}_d$ はすでに証明ずみです．■

ルベーグ可測関数の極限によって定義される関数は，再びルベーグ可測になります．このことを証明しておきましょう．

定理 7.9　$f_1(x), f_2(x), \cdots$ がルベーグ可測集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ 上の $[-\infty,\infty]$ に値をとるルベーグ可測関数とする．

（1）関数

$$\left(\sup_{n\geq 1} f_n\right)(x)=\sup_{n\geq 1} f_n(x),\ \left(\inf_{n\geq 1} f_n\right)(x)=\inf_{n\geq 1} f_n(x)$$

はルベーグ可測である．

（2）関数

$$\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x)=\limsup_{n\to\infty} f_n(x),\ \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x)=\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

はルベーグ可測である.

(3)　もし各 $x \in E$ に対して極限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するとき，関数

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

はルベーグ可測である.

証明　(1)　任意の実数 a に対して

$$\left\{\inf_{n\geq 1} f_n \geq a\right\} = \bigcap_{n\geq 1} \{\, f_n \geq a\} \in \mathfrak{M}_d$$

です．ゆえに $\inf_{n\geq 1} f_n$ はルベーグ可測となります．また明らかに f_n が可測ならば $-f_n$ も可測なので,

$$\sup_{n\geq 1} f_n = -\inf_{n\geq 1}\,(-f_n)$$

であることが容易に示せます（問題 7.3 参照）．これより $\sup_{n\geq 1} f_n$ のルベーグ可測性もわかります.

(2)

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} f_k(x)\right),$$

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} f_k(x)\right)$$

と（1）より，これらもルベーグ可測になります.

(3) は (2) より明らかです．■

練習問題

問題 7.1　$f(x)$, $g(x)$ をルベーグ可測集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上の複素数値ルベーグ可測関数であるとする．このとき

$$f(x) + g(x),\ f(x)g(x),\ cf(x)$$

（ただし c は複素数）は E 上のルベーグ可測関数である.