まえがき

本書は雑誌『数学セミナー』で2020年4月号から2021年3月号に連載された整数をテーマにした漫画『せいすうたん』を単行本化したものです．つまり，漫画本です．ですが，普通の漫画本とは異なる点があって，各話で扱われる数学的内容に関する解説がついています．この解説パートだけを見ると数学書にしか見えません．つまり，本書は漫画本でありながら数学書でもあるという比較的珍しいスタイルの本なのです．

本書で扱われる数学的内容の本来のテーマは，面白い特徴を持った整数を多数紹介するというものです．例えば，28は「その数自身を除く正の約数の総和がその数自身に一致する」という珍しい性質を持っており，完全数とよばれています：

$$1+2+4+7+14=28.$$

12（サブライム数）や78557（シェルピンスキー数）や294001（弱い素数）など，さまざまな面白い特徴を持った整数たちがキャラクターとなって漫画に登場します．一方で実際に連載し本書を執筆してみると，単に整数をたくさん紹介するだけではなく，筆者の好きな2つの数学のテーマが色濃く反映されていることに気づきます．それらは

- 特定の整数列の無限性（シェルピンスキー数の無限性など）
- 数の無理性，超越性，独立性（$\zeta(3)$ の無理性など）

です．そして，これらは互いに無関係なテーマに思えるのですが，意外な関連性も見え隠れします(金子–ザギエ予想など)．

各話において，解説パートは以下のような節から構成されています．

数学的解説／補足説明／研究課題／参考文献

「数学的解説」では漫画に出てきた数学的内容の解説を行います．命題や定理の紹介もされますが，(原則的に)この節には証明は書かれません．「補足説明」では「数学的解説」に出てきた命題や定理のうちの一部に証明を与えたり，漫画には出てこなかったけれども関連する数学の話題を書きます．「研究課題」では「数学的解説」や「補足説明」で扱った内容に関連する研究課題をいくつか出題します．「参考文献」には上記3つの節の内容に関係する必要な論文や書籍の情報を載せます．

解説に現れる定理の中には，横にアスタリスクがついたものがあります(「定理*」). これらの定理については，証明の紹介は割愛します．例えばフェルマーの最終定理を扱っており，その証明を本書に載せる余白が足りないことは明白ですが，どの定理の証明を紹介してどの定理の証明を割愛するかは基本的には筆者の好みで選ばれています．

本書ではさまざまな数列が扱われますが，数列の項を表す a_n という記号などは各話ごとに有効であることに注意してください．一方で正の約数の総和を表す $\sigma(n)$ など複数の話で扱われる数列記号もあります．

オンライン整数列大辞典(On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS)とよばれる有名な数列のオンラインデータベースがあります．本書で整数列を紹介する際には，OEIS における識別番号も掲載するようにしていますのでご活用ください(例えば，完全数の識別番号は A000396).

なお，解説パートは雑誌には掲載されていませんでしたが，本書の内容のある程度の部分は筆者のブログ INTEGERS (Hatena Blog)に過去に書いた記事の内容を基にしています．ですが，記事の単なるコピーではなく加筆修正を行なっている箇所も多く，今回書き下ろした部分も多いです．ですので，ブログの読者の方々にも「一度読んだことがあるからこの本は読まなくてもいいだろう」とは思わずに，ぜひ本書を手にとっていただきたいです．

本書はさまざまな層の方々に楽しんでいただけると思います．数学は難しいけれど漫画には興味があるという方は漫画パートをお楽しみください．証明までは興味がないけれど，漫画に書かれている数学的内容には興味があるという方は「数学的解説」を．証明が気になり，証明を読んで初めて納得し面白いと感じられる方やより進んだ内容に興味がある方は「補足説明」を．プロ級の実力者で，以上の内容はほとんど知っており，研究をして謎を解き明かしたいという方は「研究課題」をぜひお楽しみください．

本書の「数学的解説」,「補足説明」の部分は大学等での輪読セミナーに利用することもできるでしょう．また,「研究課題」の部分は大学院生の役に立つこともあるかもしれません．

雑誌『数学セミナー』で漫画が連載されたのは初めてのことで，筆者に監修の依頼がきたときは驚いたとともにとても面白そうだと感じ，喜んでお引き受けしました．筆者はあくまで監修者であって，原作者ではありません．漫画家の小林銅蟲先生が絵だけではなくお話も作っておられます．筆者は各話で扱う数学的題材をまとめた資料を作成し，小林先生がそれを基に漫画に盛り込む内容を取捨選択されます．後はネームや原稿のチェックを行うというのが筆者の監修としてのお仕事でした．その資料と

いうのは，本書の解説パートをかなり雑にしたもので(実際は，雑な資料を連載後にわかりやすく書き直したり加筆したものが本書の解説パートです)，漫画を描くために(「定理 → 証明」形式の)数学資料を読み込む作業はとても大変だったはずです．にもかかわらず，毎回数学的内容をしっかりと理解された上で見事に漫画の形にされていく小林先生の手腕にはただただ驚愕するばかりで，心から敬服しております．そして，小林先生の数学能力の高さに甘えて毎回雑な資料しか作れなかったことをここにお詫びします．

また，原稿を詳細に読んで多数のコメントをくださった松坂俊輝氏に感謝します．

それでは，不思議な整数世界の旅「せいすうたん」をぜひお楽しみください！

関 真一朗

目次

記号一覧 ―――― 5

第1話　サブライム数 ―――― 6

第2話　ロビンの定理 ―――― 18

第3話　ゲーベル数列 ―――― 30

第4話　シェルピンスキー数 ―――― 38

第5話　アペリー数 ―――― 46

第6話　弱い素数 ―――― 64

第7話　鈴木の定理 ―――― 78

第8話　ヴィーフェリッヒ素数 ―――― 94

第9話　ウォルステンホルム素数 ―――― 106

第10話　アンタッチャブル数 ―――― 122

第11話　素数表現多項式 ―――― 132

第12話　絵になる素数 ―――― 156

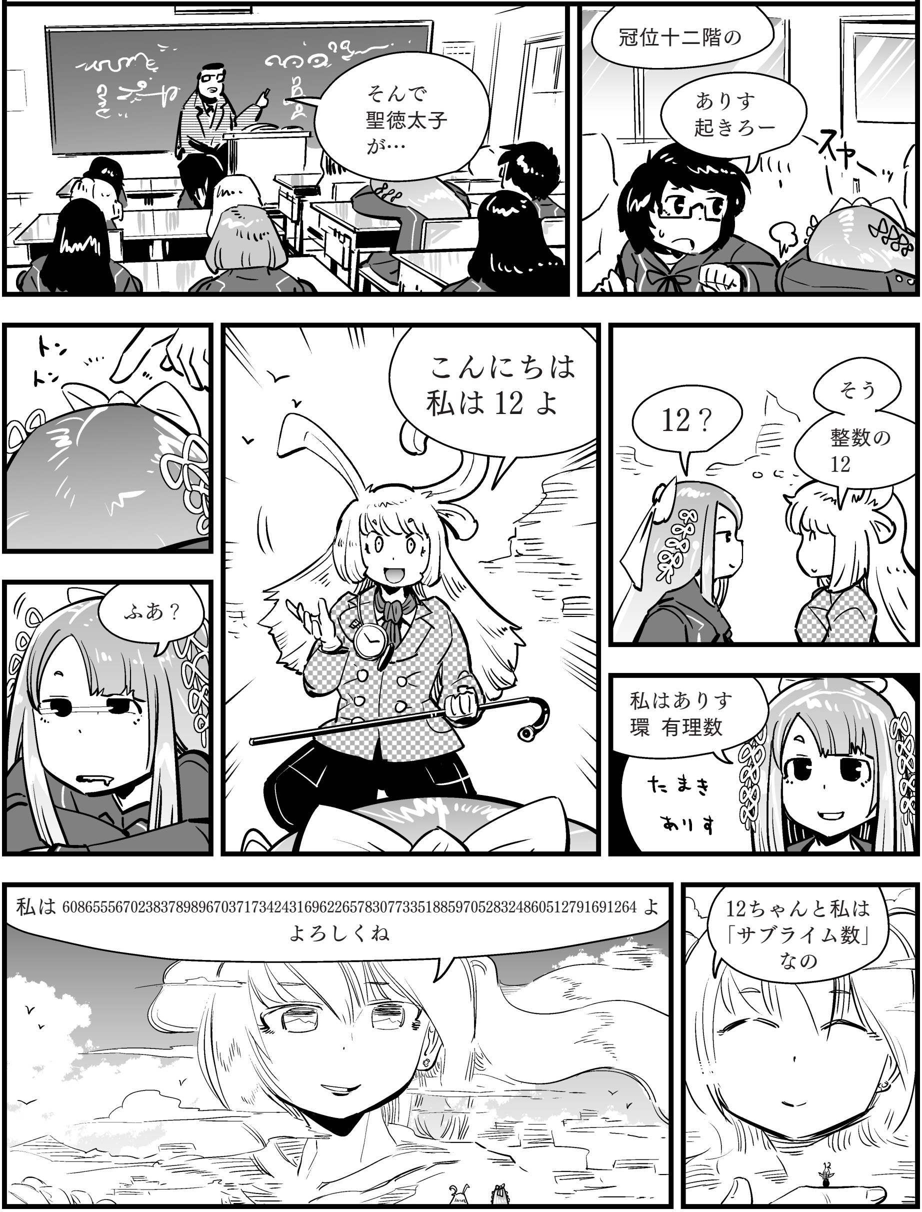
索引 ―――― 170

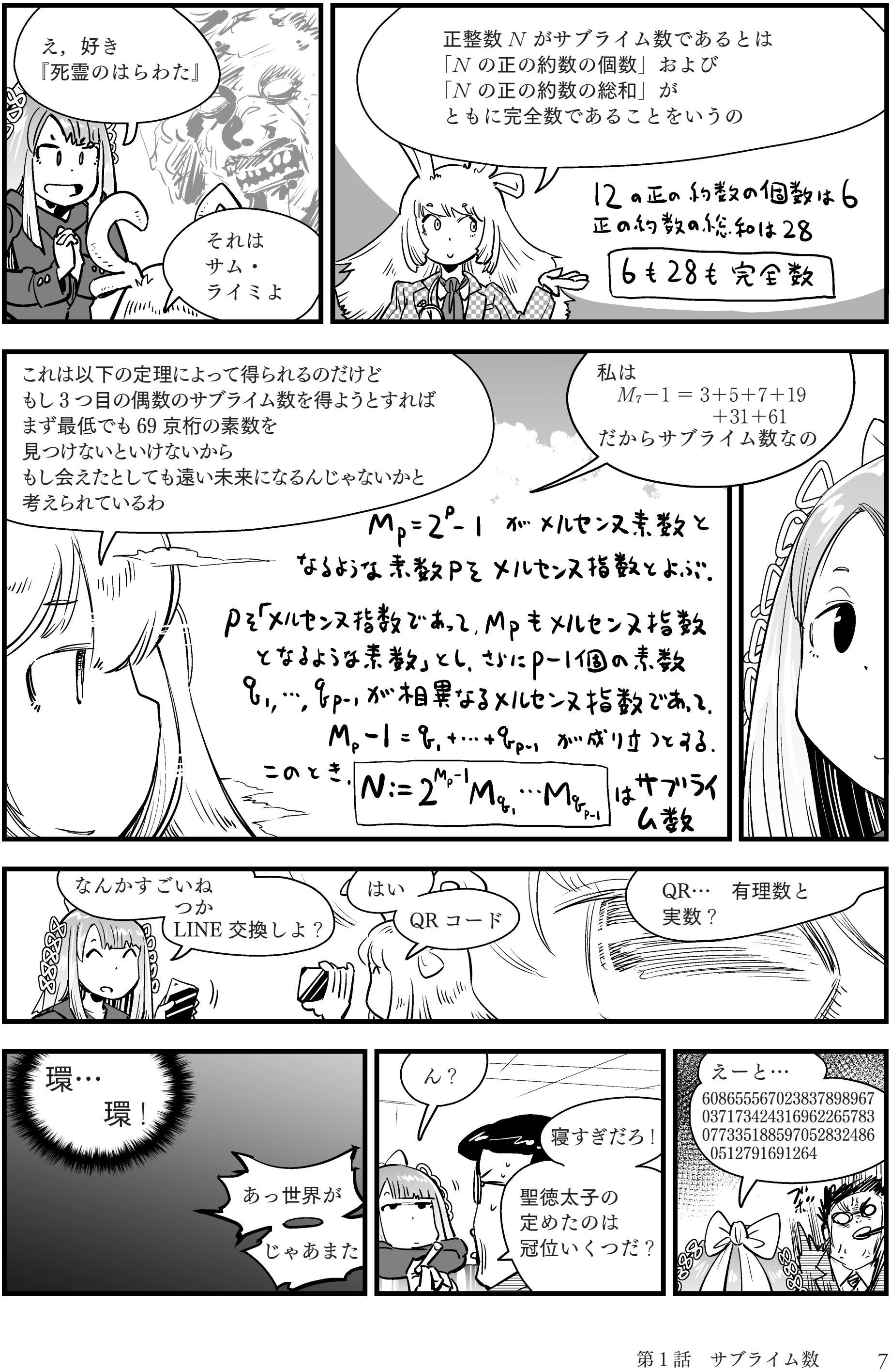
あとがき ―――― 174

記号一覧

- 集合 A の元の個数を $\# A$ で表す．
- 差集合を $A \setminus B$ で表す．すなわち，$A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}$．
- 二項係数の記号は ${}_n\mathrm{C}_k$ ではなく，$\binom{n}{k}$ を用いる．
- 整数 a が整数 b を割り切ることを $a \mid b$ で表す．
- 整数 a, b の最大公約数を $\gcd(a, b)$ で表す．a と b が互いに素であることは $\gcd(a, b) = 1$ と表すことができるが，省略して $(a, b) = 1$ と表現することもある．同様に，3 つの整数 a, b, c の最大公約数は $\gcd(a, b, c)$ など．
- 実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $\lfloor x \rfloor$ で表す．
- 整数全体の集合，有理数全体の集合，実数全体の集合，複素数全体の集合，素数全体の集合をそれぞれ，$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{P}$ で表す．
- 素数 p と零でない有理数 r について，$r = p^e \cdot a/b$ の形に r を一意的に表すとき (e, a, b は整数，$b > 0$，a と b は互いに素でともに p で割り切れない)，r の p **進付値** (p-adic valuation) $\mathrm{ord}_p(r)$ を $\mathrm{ord}_p(r) := e$ と定める．
- ランダウの記号とよばれる O と o を用いる箇所がある．例えば，$f(x)$ が複素数値関数で $g(x)$ が非負値関数であるとき，$f(x) = O(g(x))$ はある定数 $C > 0$ が存在して不等式 $|f(x)| \leqq Cg(x)$ が文脈上考えている範囲で成立することを意味する．このこの C をビッグ・オー定数とよぶ．
  また，$f(x) = o(g(x))$ $(x \to \infty)$ は任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $x_0 > 0$ が存在して，$x \geqq x_0$ で不等式 $|f(x)| \leqq \varepsilon g(x)$ が成立することを意味する．

第1話
サブライム数


そんで
聖徳太子
が…
冠位十二階の
ありす
起きろー
スヤ…ッ
トン
トン
ふあ？
こんにちは
私は 12 よ
12？
そう
整数の
12
私はありす
環 有理数
たまき
ありす
私は 6086555670238378989670371734243169622657830773351885970528324860512791691264 よ
よろしくね
12ちゃんと私は
「サブライム数」
なの



え，好き
『死霊のはらわた』
それは
サム・
ライミよ
正整数 N がサブライム数であるとは
「N の正の約数の個数」および
「N の正の約数の総和」が
ともに完全数であることをいうの
12の正の約数の個数は6
正の約数の総和は28
6も28も完全数
これは以下の定理によって得られるのだけど
もし３つ目の偶数のサブライム数を得ようとすれば
まず最低でも 69 京桁の素数を
見つけないといけないから
もし会えたとしても遠い未来になるんじゃないかと
考えられているわ
$M_p=2^p-1$ が メルセンヌ素数と
なるような素数pを メルセンヌ指数とよぶ。
pを「メルセンヌ指数であって，M_pもメルセンヌ指数
となるような素数」とし，さらにp−1個の素数
$q_1,\dots,q_{p-1}$ が相異なるメルセンヌ指数であって，
$M_p-1=q_1+\cdots+q_{p-1}$ が成り立つとする。
このとき，$\boxed{N:=2^{M_p-1}M_{q_1}\cdots M_{q_{p-1}}}$ はサブライム数
私は
$M_7-1=3+5+7+19+31+61$
だからサブライム数なの
なんかすごいね
つか
LINE 交換しよ？
はい
QR コード
QR…　有理数と
実数？
環…
環！
あっ世界が
じゃあまた
ん？
寝すぎだろ！
聖徳太子の
定めたのは
冠位いくつだ？
えーと…
608655567023837898967
037173424316962265783
077335188597052832486
0512791691264

数学的解説

「せいすうたん」の物語で最初に皆さんにご紹介するのは，サブライム数です．“sublime” は「荘厳な，崇高な，雄大な」といった意味を表す英単語なので，“sublime number” を「荘厳数」などと訳してもよいかもしれません．これは有名な完全数と関係する数ですので，まずは完全数の話から始めます．

いきなりですが，各正整数 n について，「n を除く n の正の約数の総和」と「n 自身」の大小関係を比較してみましょう．$n=p$ が素数の場合は「p を除く p の正の約数の総和」$=1<p$ なので，素数以外の場合を書きます．

$$
\begin{array}{ll}
0<1, & \mathbf{1+2+3+6+9=21>18}, \\
1+2=3<4, & \mathbf{1+2+4+5+10=22>20}, \\
\mathbf{1+2+3=6}, & 1+3+7=11<21, \\
1+2+4=7<8, & 1+2+11=14<22, \\
1+3=4<9, & \mathbf{1+2+3+4+6+8+12=36>24}, \\
1+2+5=8<10, & 1+5=6<25, \\
\mathbf{1+2+3+4+6=16>12}, & 1+2+13=16<26, \\
1+2+7=10<14, & 1+3+9=13<27, \\
1+3+5=9<15, & \mathbf{1+2+4+7+14=28}. \\
1+2+4+8=15<16, &
\end{array}
$$

$1 \leqq n \leqq 28$ の範囲では「n を除く n の正の約数の総和」よりも n の方が大きい数が 22 個(素数の場合を含む)，n と一致する数が 6 と 28 の 2 個，n の方が小さい数が 4 個あります．この分類について，次のような用語が付けられています．

定義 1.1（OEIS：A005100, A005101, A000396） 正整数 n について，「n を除く n の正の約数の総和 $<n$」が成り立つとき，n は**不足数**とよばれる．また，「n を除く n の正の約数の総和 $>n$」が成り立つときは**過剰数**とよばれ，「n を除く n の正の約数の総和 $=n$」が成り立つときは**完全数**とよばれる．

限られた大きさまでの正整数が不足数，過剰数，完全数のいずれであるかを観察すると，不足数が最も多く出現することがわかります．過剰数は比較的少なく見えますが，次が成り立つことは簡単に確認できます．

命題 1.2（証明は p. 13） 過剰数は無限に存在する．

より精密な結果としては，過剰数の占める自然密度は約 0.2476 であることが知られています([K])．一方，完全数はもっと少なく，本書執筆時点で知られている完全数

は 51 個しかありません．完全数を小さい順に 10 個並べてみます：

6,

28,

496,

8128,

33550336,

8589869056,

137438691328,

2305843008139952128,

2658455991569831744654692615953842176,

191561942608236107294793378084303638130997321548169216.

知られている完全数はすべて偶数です．奇数の完全数が存在するかについても，完全数が無限に存在するかについても，どちらもわかっていません．（奇数の過剰数も小さい範囲を見ているとなかなか現れませんが，945 が最小の奇数の過剰数です．） 次のことは比較的簡単に証明できます．

命題 1.3（証明は p. 16） x 以下の完全数の個数は $O(\sqrt{x})$ である．特に，完全数全体の集合の自然密度は 0 である：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\text{ 以下の完全数の個数}}{x} = 0.$$

完全数の定義と例を確認できたので，今回の主役であるサブライム数を定義しましょう．

定義 1.4（OEIS：A081357） 正整数 n が**サブライム数**であるとは，「n の正の約数の個数」および「n の正の約数の総和」がともに完全数であるときをいう．

サブライム数は現状，次の 2 つのみが知られています：

- 12
- 6086555670238378989670371734243169622657830773351885970528324860512791691264

12 がサブライム数であることをチェックしてみましょう．

$$\begin{aligned}&12\text{ の正の約数の個数} = 6,\\&12\text{ の正の約数の総和} = 1+2+3+4+6+12 = 28\end{aligned}$$

であり，6 と 28 はたしかに完全数であるので，12 はサブライム数であることが確認できました．もう 1 つの 76 桁の数は正の約数の個数が完全数 8128 であり，正の約数の

総和は大きめの数でここには書けません．このような大きいサブライム数はいったいどうやって見つけられたのでしょうか．それを知るためには完全数の構造をもう少し深く調べる必要があります．先ほどの完全数のうち，最初の 8 個を素因数分解してみましょう．

$$
\begin{aligned}
6 &= 2\times 3,\\
28 &= 2^2\times 7,\\
496 &= 2^4\times 31,\\
8128 &= 2^6\times 127,\\
33550336 &= 2^{12}\times 8191,\\
8589869056 &= 2^{16}\times 131071,\\
137438691328 &= 2^{18}\times 524287,\\
2305843008139952128 &= 2^{30}\times 2147483647.
\end{aligned}
$$

いずれも「(2 の冪)×(奇素数)」の形をしていることがわかります．しかも，奇素数の部分にはさらに法則が見つかります．

$$
\begin{aligned}
3 &= 2^2-1,\\
7 &= 2^3-1,\\
31 &= 2^5-1,\\
127 &= 2^7-1,\\
8191 &= 2^{13}-1,\\
131071 &= 2^{17}-1,\\
524287 &= 2^{19}-1,\\
2147483647 &= 2^{31}-1.
\end{aligned}
$$

このような形の素数には名前が付いています．

定義 1.5（OEIS：A000225, A000668）　正整数 n に対して，$M_n := 2^n-1$ と定義される正整数 M_n のことを**メルセンヌ数**とよぶ．特に，素数であるようなメルセンヌ数を**メルセンヌ素数**という．

命題 1.6（証明は p. 14）　M_n がメルセンヌ素数であれば，n は素数である．

p が素数のときに常に M_p が素数となるわけではありません．例えば，$M_{11} = 2^{11}-1 = 2047 = 23\times 89$ は素数ではありません．

定義 1.7（OEIS：A000043）　M_p がメルセンヌ素数となるような素数 p のことを**メルセンヌ指数**という．

$p=2,3,5,7,13,17,19,31,61,89$ はメルセンヌ指数です．実は，先ほど観察した偶数の完全数の満たす法則は偶然ではなく，一般的に成り立ちます．

定理 1.8（証明は p. 14） p をメルセンヌ指数とする．このとき，$2^{p-1}M_p$ は完全数である．逆に，n が偶数の完全数であれば，あるメルセンヌ指数 p が存在して $n=2^{p-1}M_p$ が成り立つ．

この定理の前半はユークリッドの『原論』に証明が書かれており，後半はオイラーが証明しました．このことから偶数の完全数とメルセンヌ素数は完全に 1 対 1 対応しており，偶数の完全数を見つける問題はメルセンヌ素数を見つける問題に置き換えられます．本書執筆時点でメルセンヌ素数は 51 個見つけられており，その中で一番大きいものは 2018 年に発見された $M_{82589933}$ です．これは十進法で 24862048 桁の素数であり（2 千万桁超え！），知られている最大の素数でもあります．

定理 1.8 を使うと，偶数のサブライム数についてもメルセンヌ指数やメルセンヌ素数を用いた法則があることを証明できます．

定理 1.9（ブラウン，証明は p. 14） p をそれ自身と M_p の両方がメルセンヌ指数となるような素数とし，$q_1,\cdots,q_{p-1}$ を相異なる $p-1$ 個のメルセンヌ指数であって，$M_p-1=q_1+\cdots+q_{p-1}$ が成り立つようなものとする．このとき，$2^{M_p-1}M_{q_1}\cdots M_{q_{p-1}}$ はサブライム数である．もし，奇数の完全数が存在しないのであれば，偶数のサブライム数は上述の形のものしか存在しない．

この定理によって，定理の条件を満たすデータ $(p,\{q_1,\cdots,q_{p-1}\})$ を見つけるごとに偶数のサブライム数が得られますし，新しい偶数のサブライム数を手に入れるには，このようなデータを見つけるしか術がありません（奇数の完全数が見つからない間は）．この知識を基に，知られている 2 つのサブライム数を再発見しましょう．

偶数のサブライム数を得るには「p と M_p がともにメルセンヌ指数」という珍しい素数 p を把握しておく必要があります．このような珍しい素数 p に対する M_{M_p}（定義からこれも素数）を**二重メルセンヌ素数**といいます．そもそもメルセンヌ素数が 51 個しか知られていないため，二重メルセンヌ素数はもっと少ない個数しか知られていないはずですが，実際に知られている二重メルセンヌ素数は以下の 4 つです（OEIS：A077586, A103901）．

$$
\begin{aligned}
M_{M_2} &= 7,\\
M_{M_3} &= 127,\\
M_{M_5} &= 2147483647,\\
M_{M_7} &= 170141183460469231731687303715884105727.
\end{aligned}
$$

これら4つの二重メルセンヌ素数に基づいてサブライム数を得るには，それぞれについて

$$
\begin{aligned}
M_2-1 &= 2 = q_1,\\
M_3-1 &= 6 = q_1+q_2,\\
M_5-1 &= 30 = q_1+q_2+q_3+q_4,\\
M_7-1 &= 126 = q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6
\end{aligned}
$$

という形の相異なるメルセンヌ指数の和への分解が必要になります．知られているメルセンヌ指数のデータと照らし合わせると，このような分解は M_3-1 と M_5-1 に対しては存在せず，M_2-1 と M_7-1 については

$$2 = 2$$

および

$$126 = 3+5+7+19+31+61 \tag{1.1}$$

という分解が見つかります．よって，前者からはサブライム数

$$2^{M_2-1}M_2 = 2^2(2^2-1) = 12$$

が得られ，後者からはサブライム数

$$
\begin{aligned}
&2^{M_7-1}M_3M_5M_7M_{19}M_{31}M_{61}\\
&\quad = 2^{126}(2^3-1)(2^5-1)(2^7-1)(2^{19}-1)(2^{31}-1)(2^{61}-1)\\
&\quad = 6086555670238378989670371734243169622657830773351885970528\\
&\qquad 324860512791691264
\end{aligned}
$$

が得られます．以上が2つのサブライム数が得られるカラクリだったのです！

サブライム数という概念をせっかく導入しても1つも存在しなければ少し悲しいですが，最も親しみのある完全数である6と28から，12という小さなサブライム数が得られるのは，12に対して新たな愛着が生まれて嬉しいです．そして，奇跡的な等式(1.1)が成り立つことによって，76桁の非自明なサブライム数が存在することもとても面白いです．

同じ方法で新しいサブライム数を見つけるためには二重メルセンヌ素数を新たに発見することが必須ですが，実は二重メルセンヌ素数の最初の4つの候補がすべて素数になっていたのは偶然で，続く $M_{M_{13}}, M_{M_{17}}, M_{M_{19}}, M_{M_{31}}$ が素数でないことは既に示されています．まだ素数かどうか確定していない最小の候補は $M_{M_{61}}$ ですが，この数はなんと約69京桁という大きさ．というわけで，生きている間に3つ目のサブライム数にお目にかかれるかは期待薄？

補足説明

定義 1.10　正整数 n に対して，$\tau(n)$ を $\tau(n) :=$「n の正の約数の個数」で定義し，$\sigma(n)$ を $\sigma(n) :=$「n の正の約数の総和」で定義する．

これらの関数を用いると

$$\begin{aligned} n：\text{不足数} &\iff \sigma(n) < 2n, \\ n：\text{完全数} &\iff \sigma(n) = 2n, \\ n：\text{過剰数} &\iff \sigma(n) > 2n \end{aligned} \tag{1.2}$$

および

$$n：\text{サブライム数} \iff \sigma(\tau(n)) = 2\tau(n) \text{ かつ } \sigma(\sigma(n)) = 2\sigma(n)$$

がわかります．

関数 $\sigma(n)$ について，次の性質は基本的です．

命題 1.11（$\sigma(n)$ の乗法性）　m と n が互いに素な正整数であるとき，$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ が成り立つ．

証明　正整数 n が $n = \prod_{p|n} p^{e_p}$ と素因数分解されているとき，

$$\sigma(n) = \prod_{p|n} \frac{p^{e_p+1}-1}{p-1} \tag{1.3}$$

という明示公式が成り立つ．これは

$$\prod_{p|n} \frac{p^{e_p+1}-1}{p-1} = \prod_{p|n} (1+p+p^2+\cdots+p^{e_p})$$

を展開すると n の正の約数がちょうど 1 つずつ現れることからわかる．この明示公式から $\sigma(n)$ の乗法性が従う．　□

命題 1.2 の証明　n を過剰数または完全数とし，k を 2 以上の整数とする．このとき，kn は過剰数である．実際，n の任意の正の約数 d について，kd は 1 より大きい kn の約数であることから，$\sigma(kn) \geqq k\sigma(n)+1 > k\sigma(n)$ が成り立ち，仮定から $\sigma(n) \geqq 2n$ なので，$\sigma(kn) > 2\cdot(kn)$ となって，kn は過剰数である．このようにして得られる過剰数はもちろん無限に存在する．　□

他の過剰数や完全数の倍数ではないような過剰数のことを**原始過剰数**といいます（OEIS：A071395）．言い換えると，自分自身を除く正の約数がすべて不足数であるような過剰数のことです．原始過剰数についてこれ以上詳しくは述べないので，興味のある読者は調べてみてください（cf. [D, E]）．

命題 1.6 の証明　対偶を証明する．n が素数でないと仮定する．$M_1 = 1$ は素数ではないので，$n > 1$ としてよい．すると，$1 < a, b < n$ を満たす整数 a, b を用いて $n = ab$ と表すことができる．このとき，

$$M_n = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)((2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + \cdots + 2^a + 1)$$

と M_n は因数分解され，$2^a - 1 > 1$，$(2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + \cdots + 2^a + 1 > 1$ なので，M_n は合成数である．□

定理 1.8 の証明　p がメルセンヌ指数であるとき，M_p は奇素数なので，命題 1.11 より

$$\sigma(2^{p-1}M_p) = \sigma(2^{p-1})\sigma(M_p) = (2^p - 1)\cdot 2^p = 2(2^{p-1}M_p)$$

となって，$2^{p-1}M_p$ が完全数であることがわかる．

逆に，n を偶数の完全数としよう．n が偶数であることから，正整数 e および奇数 m が存在して，$n = 2^e m$ と表すことができる．n が完全数であることと命題 1.11 から

$$2^{e+1}m = 2n = \sigma(n) = \sigma(2^e)\sigma(m) = (2^{e+1} - 1)\sigma(m)$$

が成り立つので，

$$\sigma(m) = \frac{2^{e+1}m}{2^{e+1} - 1} = m + \frac{m}{2^{e+1} - 1}$$

が得られる．$\sigma(m) - m$ は整数なので，$m/(2^{e+1} - 1)$ も整数でなければならない．その整数を d とすると $m = (2^{e+1} - 1)d$ が成り立つので，d は m の正の約数である $(d < m)$．$\sigma(m) = m + d$ という等式は「m の正の約数の総和 $= m + d$」ということであるが，m も d も m の正の約数なのであるから，これは「m の正の約数は m と d のちょうど 2 個である」ということを意味している．しかし，そのような状況は m が素数であり，かつ $d = 1$ という場合しかあり得ない．よって，$m = 2^{e+1} - 1 = M_{e+1}$ は素数であり，命題 1.6 から $p \coloneqq e + 1$ は素数でなければならない（p はメルセンヌ指数）．そうして，$n = 2^{p-1}M_p$ となる．□

定理 1.9 の証明　まず前半を示す．$n \coloneqq 2^{M_p - 1}M_{q_1} \cdots M_{q_{p-1}}$ を主張に書かれているとおりのサブライム数の候補とする．このとき，$\tau(n) = 2^{p-1}M_p$ および

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma(2^{M_p - 1})\sigma(M_{q_1})\cdots\sigma(M_{q_{p-1}}) \\ &= (2^{M_p} - 1)(1 + M_{q_1})\cdots(1 + M_{q_{p-1}}) \\ &= (2^{M_p} - 1)\cdot 2^{q_1 + \cdots + q_{p-1}} = 2^{M_p - 1}M_{M_p}\end{aligned}$$

と計算される．p および M_p がメルセンヌ指数であるという仮定から，定理 1.8 によって $\tau(n)$ と $\sigma(n)$ はともに完全数であり，したがって n はサブライム数である．

次に，後半を示すために「奇数の完全数は存在しない」と仮定し，n を偶数のサブライム数とする．n は偶数であるため，正整数 e および奇数 m が存在して，$n = 2^e m$ と

表すことができる．n はサブライム数であり奇数の完全数は存在しないと仮定されているので，$\sigma(n)$ は偶数の完全数である．よって，定理 1.8 より，あるメルセンヌ指数 q が存在して，$\sigma(n) = 2^{q-1}M_q$ と書ける．

$$\sigma(n) = \sigma(2^e m) = \sigma(2^e)\sigma(m) = (2^{e+1}-1)\sigma(m)$$

の奇数の素因数が M_q しかないことから，$2^{e+1}-1 = M_q$，すなわち $e = q-1$ であることがわかる．また，$\sigma(m) = 2^{q-1}$ であり，特に $m > 1$ である．さて，ℓ を奇素数とし，m が ℓ^d でちょうど割り切れると仮定しよう（d は正整数）．このとき，$\sigma(m) = 2^{q-1}$ の約数

$$\sigma(\ell^d) = 1+\ell+\cdots+\ell^d > 1$$

は 2 の冪でなければならない．特に，d は奇数でなければならないため，$d = 2t+1$ とおく．すると，

$$\sigma(\ell^d) = (1+\ell)(1+\ell^2+\ell^4+\cdots+\ell^{2t})$$

を得る．もし $t \geqq 1$ であれば $1+\ell^2+\cdots+\ell^{2t}$ は偶数である必要があり，t は奇数で $t = 2s+1$ とおくことができる．このとき，

$$\sigma(\ell^d) = (1+\ell)(1+\ell^2)(1+\ell^4+\ell^8+\cdots+\ell^{4s})$$

において，$1+\ell$ と $1+\ell^2$ がともに 2 の冪でなければならない．しかし，$1+\ell = 2^u$ $(u \geqq 2)$ であれば，

$$1+\ell^2 = 1+(2^u-1)^2 = 2(2^{2u-1}-2^u+1)$$

は 2 の冪にはなり得ない．したがって，$t = 0$，すなわち $d = 1$ でなければならないことがわかった．また，$\sigma(\ell) = 1+\ell > 1$ が 2^{q-1} の約数であることから，ℓ はメルセンヌ素数である．以上により，相異なるメルセンヌ指数 $q_1, \cdots, q_v$ が存在して $(v \geqq 1)$，$m = M_{q_1}\cdots M_{q_v}$ と書ける．このとき，

$$\sigma(m) = (1+M_{q_1})\cdots(1+M_{q_v}) = 2^{q_1+\cdots+q_v}$$

であるが，これが 2^{q-1} に等しいため，$q-1 = q_1+\cdots+q_v$ が成り立つ．$\tau(n)$ も偶数の完全数であると仮定されているので，あるメルセンヌ指数 p が存在して

$$2^{p-1}M_p = \tau(n) = \tau(2^{q-1}M_{q_1}\cdots M_{q_v}) = 2^v q$$

でなければならない．よって，$v = p-1$ および $q = M_p$ が成り立ち，確認すべきことはすべて示されている． □

命題 1.3 の証明も紹介しますが，その前に奇数の完全数に関する命題を 1 つ証明しておきます．

命題 1.12 n が奇数の完全数であるならば，ある素数 q とある正整数 e, m が存在して，q と m は互いに素で，$q \equiv e \equiv 1 \pmod 4$ および $n = q^e m^2$ が成り立つ．

証明　$n=\prod_{p|n} p^{e_p}$ を n の素因数分解とすると，n が完全数であることから

$$2n=\sigma(n)=\prod_{p|n}\sigma(p^{e_p})$$

が成り立つ．n が奇数なので，n の素因数 p の中に 1 つだけ $\sigma(p^{e_p})$ が単偶数(4 の倍数ではないような偶数)であるものがあり(以下，それを q とし，$e:=e_q$ とおく)，それ以外の素因数 p については $\sigma(p^{e_p})$ は奇数でなければならない．p を q と異なる n の素因数とするとき，

$$\sigma(p^{e_p})=1+p+p^2+\cdots+p^{e_p}$$

が奇数であることから，e_p は偶数である．よって，n/q^e は平方数であり，m の存在がわかった．同様の議論により，e は奇数である．もし，$q\equiv 3 \pmod 4$ であれば，

$$\sigma(q^e)\equiv 1+3+1+3+\cdots+1+3\equiv 0 \pmod 4$$

となって $\sigma(q^e)$ が単偶数であることに矛盾するので，$q\equiv 1 \pmod 4$ である．また，もし $e\equiv 3 \pmod 4$ とすると，

$$\sigma(q^e)\equiv 1+e\equiv 0 \pmod 4$$

となって，やはり矛盾するので，$e\equiv 1 \pmod 4$ である．□

命題 1.3 の証明　定理 1.8 より x 以下の偶数の完全数の個数は $2^{p-1}M_p\leqq x$ を満たすメルセンヌ指数 p の個数に等しく，そのような p は $4^{p-1}\leqq x$ を満たすので，$O(\log x)$ しかない．

よって，後は奇数の完全数の個数を上から評価すればよい．n を x 以下の奇数の完全数とし，$n=q^em^2$ を命題 1.12 の表示とすると，$m\leqq\sqrt{x}$ が成り立つ．したがって，q^em^2 が完全数となるような q^e が m から一意的に決まればよい．どんな奇数の完全数 $n=q^em^2$ についても

$$2=\frac{\sigma(n)}{n}=\frac{\sigma(q^e)}{q^e}\cdot\frac{\sigma(m^2)}{m^2}$$

より，

$$\frac{2m^2}{\sigma(m^2)}=\frac{1+q+q^2+\cdots+q^e}{q^e}$$

が成り立つ．左辺は m のみに依存し，右辺は既約分数表示になっているので，所望の一意性が従う．

以上により証明が完了する(し，アーベルの総和公式を用いれば完全数の逆数の総和が収束することも従う)．□

研究課題

課題 1.1　メルセンヌ素数は無限に存在するか.

課題 1.2　奇数の完全数は存在するか.

課題 1.3　3つ目のサブライム数は存在するか.

課題 1.4　奇数のサブライム数は存在するか.

●参考文献

［D］ L. E. Dickson, *Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors*, Amer. J. Math. **35** (1913), 413–422.

［E］ P. Erdős, *On the density of the abundant numbers*, J. London Math. Soc. **9** (1934), 278–282.

［K］ M. Kobayashi, *On the density of abundant numbers*, Ph.D. thesis, Dartmouth College, 2010.