しっかり基礎からミクロ経済学
LQ アプローチ

数学の復習（詳細版）

梶谷真也　　鈴木史馬　著

目 次

付 録A　数と式

A.1　数学という言葉

本章では，経済学の学修を行う上で必要不可欠な数学の基本文法の復習や，最低限の数学知識を説明します．その際,「そもそも数とは何か」という基本的なことや，さまざまな数学の技法・公式が人間社会を考える上でどのように役立つのかについても説明していきます.何事もやらなければできるようにはなりません．まずは勉強を始めましょう.

A.1.1　言葉と意味

言語とは意味を伝達するための記号の体系（ルール）です.「意味を伝達する」というと少し堅い感じがしますが，要するに自分が表現しようとしていることを他人に理解してもらう，また他人が表現していることを自分が理解するためのコミュニケーションと表現してもよいかもしれません．みなさんの多くは日本語を母国語として使うことができるわけですから，日本語を使って意味を伝達することができているはずです．しかしながら，日常的に用いている言語（日常言語）にはコミュニケーションの手段として向いている部分と不向きな部分があります.

例えば，友人 2，3 人と昼ごはんを食べながら世間話をする状況を考えてみましょう．この友人はみんな 1，2 限に同じ授業を履修していて，その他にも同じ科目を多く履修していたとします．要するに同じような経験を共有しているとします．この場合，あまり多くの言葉を使わなくても，誤解される恐れはありません．例えば,「経済学入門」という授業で鈴木先生のクラスを受講している学生のグループの誰かが

「鈴木の授業やばい」

と言ったとします．すると，ここでいう「鈴木の授業」とは非常に高い確率で「鈴木史馬先生が担当する経済学入門」でしょう．そして，それを聞いた友人もそのように理解できるは

ずです．しかし，もし友人の中に梶谷先生の「経済学入門」を受講していて鈴木先生の存在を知らない学生がいたとしたら「鈴木の授業」だけでは何のことかすぐには分からないかもしれません．そもそも他学部の人や，他大学の人にとっては何のことか分からないでしょう．

鈴木先生の「経済学入門」を履修していない人に対して「鈴木の授業がやばい」ということを誤解のないように正確に伝えるためには,「経済学の授業を受講していて，その担当が鈴木先生であること」,「経済学の授業名は「経済学入門」であること」,「鈴木先生とは鈴木史馬先生」であることなどを細かく説明しなければいけません．例えば，違う学部の友人に対しては，

「鈴木史馬先生が担当する経済学部の経済学入門という授業はやばい」

というように言わなければならないわけです.「鈴木の授業やばい」であれば 8 文字で済みますが,「鈴木史馬先生が担当する経済学部の経済学入門という授業はやばい」というと 30 文字も必要になります．同じ大学に通う友人に日本語で同じ意味を伝えるにしても，8 文字で済む相手と 30 文字も必要とする相手がいるということです.

また「やばい」という語についても注意が必要です.「やばい」は本来不都合な状況を指す語でしたが，昨今の若者言葉としては逆に目立って良いことにも使われているようです．この場合，その「やばい」が良い意味なのか悪い意味なのかは会話が交わされている状況に依存します．すなわち,「やばい」という言葉はそれ自体厳密な意味を持たず，ある状況を「やばい」と表現し，それをどう解釈するかは受け取り手に任されているということを意味します．もし，悪い意味ではなく良い意味で「やばい」を使うとしたら，相手に「やばい」が良い意味を持つこともあるという前提知識が必要となります.

意味の曖昧な言葉は，それが友人間のコミュニケーションの道具として使われている限りは問題ないかもしれません[1]．しかし，もし見ず知らずの相手に対して正確に意味を伝えるならば，誤解のないように正確な言葉を使わなければなりません．日常言語はそれを使って意味をやりとりしようとする人々の日常的な経験・前提知識に依拠しています．同じ経験を共有していない人に正確に意味を伝えようとすると，より多くの言葉を使って意味を表現しなければならなくなります．すなわち，8 文字と 30 文字の差 22 文字分の意味を経験の共有など非言語的なもので補っていることになります.

[1]むしろ意味の曖昧な言葉を媒介にしてもコミュニケーションがとれる関係を友人関係と呼ぶのかもしれません.

意思を伝達するだけなら言葉はいらないのかもしれません．赤ちゃんは通常言葉を発することができませんが，泣き声など非言語的なコミュニケーション手段により自分の意思を伝えようとします．赤ちゃんを育てている親などの立場の人間は赤ちゃんの意思をくみ取ろうとするので，泣き声だけでもその意思が伝わります．外国で何かのお店に入った際にその国の言語が一切できなくても，身振り手振りで何とか意思を伝達して買物をすることができます．お店の人にとっては例え言語が通じなくても，そのお店に入ってきた以上お客さんであるということが推測でき，一生懸命品物を売ろうとするからです．このように，日常言語や非言語によるコミュニケーションというのは，情報の受け手にその情報を受け取ろうという意志さえあれば相当程度伝わるものです.

しかし，社会生活において接する人々がすべて他人の発する何らかの情報を正確に受け取ろうとしてくれるわけではありません．大学で試験の答案を採点する教員は，汚い字が書いてあれば一生懸命読みとろうとはしますが，汚すぎて読めなければ仕方がないのでバツを付けます．就職活動ではエントリーシートという履歴書兼自己紹介文を書きますが，そこで書いてあることが読み手にとって理解しづらい内容であれば，採用する側はそのエントリーシートの書き手に低い評価しか与えません．また，社会に出て働く場合，そこで日頃接するのは同僚や上司，あるいは取引相手であり，感覚で通じ合える友人ではありません．相手にとって自分が「気の合う仲間ではない」,「大切に育てるべき赤ん坊ではない」,「お金を払ってくれるお客さんではない」状況，すなわち，自分が社会における 1 人の独立した個人として存在する状況において，曖昧でないコミュニケーション手段をもつことは不可欠であるといえます.

A.1.2　数学という言葉

大学で学ぶ学問はたいていの場合，日常感覚からするとかなり複雑な意味・概念を扱います．複雑な意味・概念を正確に日常言語（日本語）で表現するためには，非常に多くの情報量を必要とします．例えば，高校時代の国語（現代文）で難解な評論文の読解問題が出たことを思い出してください.

「傍線 1 の『この』とは何を指すのか 100 字以内で説明しなさい.」

『この』が何を指すのか分からないということがあったのではないでしょうか．日常言語（日本語）で複雑な意味を表現すると情報量が多くなり過ぎ，分かりにくくなります．そのため，書かれている内容を正確に理解しているかを確認する問題が出されるわけです．

経済学では，日常言語（日本語）だけではなく，複雑な意味・概念を表現するための専門の言語である数学も利用しながら社会や人間行動の仕組みについて考えていきます．実は，数学とは言語の一種なのです．特に，数学は文字（記号）と意味とを切り離すことで**分からないモノを分からないモノとして扱う**ことを可能にしてくれます．

例えば，

$$1 + 1 = 2$$

を日常言語で解釈すると

「リンゴ１つとリンゴ１つの合計はリンゴ２つである」

というようなものに対応します．それでは

$$x + y = y + x$$

はどうでしょうか.「$x + y$」は「よくわからない数 x とよくわからない数 y を足したもの」ということを意味しています．よって,「$x + y = y + x$」とは

「よくわからない数 x とよくわからない数 y を足したものは
よくわからない数 y とよくわからない数 x を足したものと等しい」

ということを意味しています．これは「リンゴ１個とミカン１個の合計は何か？」というような意味に対応しています．すなわち,「リンゴ１個とミカン１個の合計はミカン１個とリンゴ１個の合計に等しい」というような主張がこれに対応しています．通常リンゴとミカンは違うものなので足し合わせることはできません．数学を使うと，足し合わせることができないものは足し合わせることができないものとして扱うことができます．数学は分からないものを分からないまま扱うことを可能にしてくれます．

これには非常に大きなメリットがあります．１つは**複雑な計算が容易になる**という計算上のメリット，もう１つは**日常的な意味を論理的に厳密に扱うことができる**点です．

計算上のメリット

数学の便利さの一つである「計算が容易になる」ということを説明するために，次のような問題を考えてみましょう．

> 1 つのフルーツバスケットにはリンゴが 2 個，ミカンが 4 個，柿が 2 個入っている．このフルーツバスケットを 4 個買ってきて，そこから柿を 4 個，ミカンを 7 個，リンゴを 2 個食べた．残っている果物の数はいくらか．

リンゴとミカン，柿は違うものですが，果物という基準では同じものとして捉えることができます．そこで，**果物という基準**で考えてみましょう[2]．これを数学的に解くと以下のようになります．リンゴの数を x，ミカンの数を y，柿の数を z として，1 つのフルーツバスケットに入っている果物の数を f とします．

$$f = x + y + z = 2 + 4 + 2$$

フルーツバスケットが 4 個ということは，

$$\begin{aligned} 4 \times f &= 4 \times (x + y + z) \\ &= 4x + 4y + 4z \\ &= 4 \times 2 + 4 \times 4 + 4 \times 2 \\ &= 8 + 16 + 8 \end{aligned}$$

そこからリンゴを 2 個，ミカンを 7 個，柿を 4 個食べたので，

$$\begin{aligned} & \overbrace{(8 + 16 + 8)}^{4\text{個のフルーツバスケット}} - \overbrace{(2 + 7 + 4)}^{\text{食べた果物の量}} \\ = & \ (8 - 2) + (16 - 7) + (8 - 4) \\ = & \ 6 + 9 + 4 \end{aligned}$$

すなわち，残りはリンゴ 6 個，ミカン 9 個，柿 4 個ということになり，果物という基準で測った残りの数は 19 となります．

[2]基準の考え方は付録 B 章で詳しく説明します．

このように複雑な計算操作をするうえでは数学が欠かせないことはいうまでもありません．しかし，数学の有用さはこのような計算上の利点だけではありません．2 つ目の利点である**日常的な意味を論理的に厳密に扱うことができる点**にこそ本当のすごさがあります．といっても，これはなかなか分かりにくく，じっくり勉強していかなければ身につきません．付録 A 章の残りの部分と付録 B 章では，意味を論理的に厳密に扱う基本としての数学のさまざまなルールを説明していきます．

A.2　数とは何か

数学の基本は**数**です．一言で数といっても実はさまざまな分類があります．ここでは，経済学の授業で使う範囲でいくつかの重要な数の考え方について説明します．

A.2.1　自然数と整数

数の基本は「数えること」です．例えば行列に並んでいる人の数や居酒屋で「とりあえずビール」で手を挙げた人の数を数える場合，1 人，2 人，3 人，4 人 $\cdots$ と数えていきます．このように個数や順番を表すのに用いる数を**自然数**といいます．自然数は

$$1, 2, 3, 4, \cdots$$

と 1 から 1 ずつ加えていった数の全体を表す場合と

$$0, 1, 2, 3, 4, \cdots$$

0 から 1 ずつ加えていった数の全体を表す場合があります．

自然数

自然数とは，0 ないし 1 から 1 ずつ加えていった数の全体をいう．

自然数以外の数もあります．代表的なものとして**整数**があります．整数は 0 から 1 ずつ加えていった自然数 (1,2,3,$\cdots$) と，1 ずつ引いていって得られる数 $(-1, -2, -3, \cdots)$ の全体を

表します．

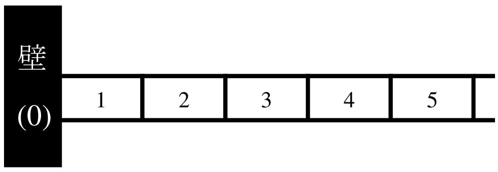
$$\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$$

整数

整数とは，0 から 1 ずつ加えていった数と 1 ずつ引いていった数の全体をいう．

自然数と整数の違いは何でしょうか．なぜこのような違いを考える必要があるのでしょうか．自然数とは「モノを数えるときに使う言葉」とか「順番を表すための言葉」というような意味があります．例えば，同じ形の堅いレンガを数えるために，レンガをある壁の位置（ここを 0 と呼ぶ）の右側に並べていくとします．こうして数えていったときの数字が自然数です（図 A.1 参照).

図 A.1: 自然数のイメージ



それでは自然数を使ってレンガの計算をしてみましょう．例えば，レンガ 3 個にレンガ 2 個を加えると，

$$3 + 2 = 5$$

とレンガは 5 個になります．同様に，レンガが 3 個ある時にレンガ 2 個を工事現場に送る（引く）と

$$3 - 2 = 1$$

と残りのレンガは 1 個になります．では,「レンガが 2 個ある時にレンガを 3 個工事現場に送る（引く)」とどうなるでしょうか．

$$2 - 3 = ?$$

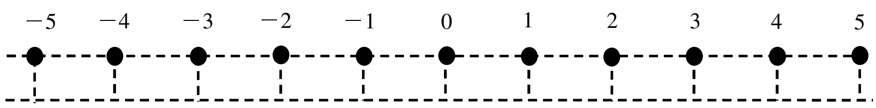
自然数には0より小さな値はありませんので「レンガが2個しかない時，レンガを3個工事現場に送る（引く）ことはできない」となります．すなわち，

$$\text{自然数だと } 2-3 \text{ は計算できない！}$$

となります．

一方で，整数は地面のあるところに基準となる小石を置き0とします．そして，その0の小石の右側にレンガを置きレンガの右端に小石を置き1とします．さらにその右側にレンガを1個置き右端に小石を置き2とします．このように右側にレンガを置きその右端に小石を並べていき，小石に数字を順に振っていきます．同時に基準とした0の石の左側にもレンガを置きその左端に小石を置き -1 とします．その左側にレンガを置き左端に小石を置き -2 とします．このように左側にレンガを並べていき左端に小石を置いていって，0を基準に反対にある数字に「$-$（マイナス）」を付けていきます．すると，0を中心にして等間隔に小石が並んでいて，そこに数字が割り当てられている感じになります．図A.2のようなイメージです．

図 A.2: 整数のイメージ



整数の範囲で「レンガが2個ある時にレンガを3個工事現場に送る（引く）」ということは，

$$2-3=-1$$

となります．これはどういう意味でしょうか．これは「レンガが2個しかない時，レンガを3個工事現場に送る（引く）ためには，レンガが1個足りない」という意味になります．

このレンガの数え方の違いは一体何を意味するのでしょうか.「レンガが2個しかないときに，レンガ3個を引くことができない」というのは，目の前にあるレンガを何個使うか考えていて，現在存在しているレンガの個数以上は使えないという意味です．一方,「レンガが

2 個しかない時，レンガ 3 個を工事現場に送る（引く）ためにはレンガが 1 個足りない」という場合，目の前にあるレンガについて考えているというよりはレンガ一般について抽象的に考えていることになります．

この違いは，$2-3$ という数学的操作を自然数の範囲で行うのか，整数の範囲で行うのかにより生じます．**自然数は負の値を取りません**ので，より小さいものから大きいものを引くことはできません．一方，**整数は負の値を許容しています**ので，より小さいものから大きいものを引いてもかまいません．すなわち，自然数で数を捉えると引き算という数学的操作ができなくなることがあるのに対して，整数で数を捉えれば引き算を不自由なく行うことができます．このように，数をどう捉えるかによって可能となる数学的な操作が変わってきます．自然数や整数を数学で学ぶのはそのためです．

A.2.2　実数と計算

実数の意味

整数は引き算をそつなくこなせる数でした．では割り算はどうでしょうか．例えば，いくつかのレンガを何人かの作業員で運ぶ状況を考えましょう．レンガが 10 個あってそれを 2 人の作業員で運ぶのであれば，1 人 5 個ずつ持てばよいでしょう（$10 \div 2 = 5$）．それでは，レンガが 10 個あってそれを 3 人の作業員で運ぶ場合（$10 \div 3$），1 人当たり何個運べばよいのでしょうか？

これを整数の範囲で考えてみましょう．1 人当たり 3 個運べば全部で 9 個しか運べないので，レンガが 1 つ残ります．1 人当たり 4 個であれば全部で 12 個運べますが，そんなにレンガを運ぶ必要はありません．よって，1 人当たり運ばなければならないレンガは 3 個と 4 個の間ですが，残念ながら 3 から 4 の間に小石（整数）は置かれていません．ということは，この問題は整数では考えられないということが分かります．つまり，

整数だと $10 \div 3$ は計算できない！

ということになります．では「$10 \div 3$」という数が存在しないかというと，そういうわけではありません．3 と 4 の間に対応する数がありそうです．つまり，整数を表す小石と小石の

間にも数が存在しています．そこで,「整数と整数の割り算で表現される数」を**有理数**と呼びます．通常 $\frac{10}{3}$ のように分数で表記します．

もう少し複雑な計算として，同じものを 2 回掛け合わせる二乗や 3 回掛け合わせる三乗などの操作があります．これらを**累乗**と呼びます．例えば，2 の二乗は 4，3 の二乗は 9 などです．そして，このことは二乗することで何かの数字になる数というものも存在していることを意味しています．例えば，二乗して 4 になる数は 2，9 になる数は 3 などです．それでは，二乗して 2 になる数や二乗して 3 になる数とはどのようなものでしょうか？例えば，$\frac{7}{5}$ を二乗すると $\frac{7}{5} \times \frac{7}{5} = \frac{49}{25}$ で 2 より少し小さな値になります．$\frac{3}{2}$ を二乗すると $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ で 2 より少し大きな値になります．よって，二乗すると 2 になる値とは $\frac{7}{5}$ より大きく $\frac{3}{2}$ より小さな値となります．このようにいろいろ試していくと，二乗すると 2 になるような分数が見つかりそうですが，実はこの値は整数の分数では表すことができません．では二乗すると 2 になる数が存在しないかというとそういうわけではありません．このような数も整数を表す小石と小石の間に存在しているはずです．このような数を**無理数**と呼びます．

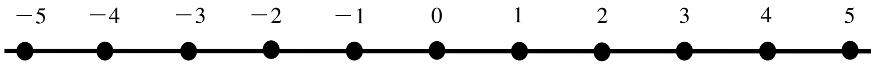
以上のような有理数や無理数を表現するために，整数を表す小石と小石の間に連続的な線を引っ張って，その直線上のすべての点に対応しているようなものとして数を捉えてみましょう．この直線は原点 0 の左右に伸びた一本の直線であり，**数直線**といいます．このようにして捉えた数を**実数**と呼びます．

実数

基準点（原点）0 の左右に伸びた一本の直線を数直線といい，その数直線上のすべての点に数を対応させることで，向きを含めた原点との位置関係として数を捉えたものの全体を実数と呼ぶ．

実数は図 A.3 のような直線となります．数直線上の小石と小石の間を表す数を**実数**といいます．

図 A.3: 実数（数直線）



実数の意味と便利さを考えてみましょう．例えば「レンガ 10 個を 3 人で等分する」という操作は割り算で表現できます．

$$10 \div 3$$

この割り算を表現する別の方法として**分数**があります．$10 \div 3$ を分数で表現すると

$$10 \div 3 = \frac{10}{3}$$

です．$\frac{10}{3}$ は「10 を 3 個に等分割したものの 1 個の大きさ」です．横線の上にある値を**分子**，下にある値を**分母**と呼びます．10 個を 3 人で均等分割すると

$$\frac{10}{3} = \frac{9+1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

となります．すなわち，整数 3 に $\frac{1}{3}$ を加えた大きさになるということです．$\frac{1}{3}$ とは「1 を 3 個に等分割したものの 1 個の大きさ」です．もちろん 1 つのレンガを 3 等分することはできません．3 等分しようとしても簡単には割れませんし，下手をしたら粉々に砕けてしまうかもしれません．高性能ノコギリで 3 等分できたとしても，いざ使う段になって接着するわけにもいきません．つまり，レンガ $\frac{1}{3}$ 個とは本当のレンガを 3 等分しているわけではないということがわかります．ここで重要なのは，レンガ $\frac{1}{3}$ 個とは 3 等分されたレンガの 1 片ではなく，「1 人当たりレンガ $\frac{1}{3}$ 個」という点です．すなわち，「3 人当たりレンガ 1 個」ということで，例えば「レンガを 1 個持つ人が 1 人と持たない人が 2 人」という意味なのです．

整数でレンガを考える場合，考える基準はあくまでもレンガ 1 個単位に固定しています．したがって，レンガを 1 個より小さく分割するわけにはいきません．一方で，実数でレンガを考えるとき，考える基準を「レンガ 1 個」と固定とする必要はありません．「1 人当たりのレンガの個数」というようにレンガの計測基準自体を変えることができます．

実数は 1 つの単位で測られたモノの量・大きさを細かく分割したり，いくつかにくくり直して他の単位で測り直すことができます．これを数学的には「除法（割り算）が可能」といいます．また，数の中には「円周率 ; 3.141592...」や「2 の平方根 ; 1.414213...」のように割り算の形では表記できない数もあります．このような数直線上に連続的に存在している数の全体をとらえるものが実数ということになります．

実数の性質

数直線上の小石と小石の間に存在している実数を表現する方法として分数と小数があります．

分数　分数には「割り切れる」分数と「割り切れない」分数があります．割り切れる分数とは，例えば

$$4 \div 2 = \frac{4}{2} = 2$$

です．意味は「4 を 2 で割ったら 2」ということです．つまり，整数を分数で表現していることになります．割り切れない分数とは

$$3 \div 2 = \frac{3}{2}$$

です．$\frac{3}{2}$ の大きさを表現するために割り切れる分数（整数）との和を使うというものがあります．例えば，既に紹介したように

$$\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

と式を変形することができます．すると，分数 $\frac{3}{2}$ は整数 1 に分数 $\frac{1}{2}$ を加えたものに等しいことが分かります．

ところで，ここで重要な注意事項があります．それは**小学校で習った「帯分数」は使ってはいけない**ということです．

帯分数は禁止

割り切れない分数の表現方法として帯分数というものがあった．例えば，

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

を $+$ 記号を省略して

$$1\frac{1}{2}$$

と表現することである．小学校で習ったのは算数であって数学とは違う．**数学では何があっても絶対に $+$ 記号は省略してはいけない．** 理由は数学で省略する記号は足し算（加法）記号 $+$ ではなく掛け算（乗法）記号 $\times$ だからである．

小数による表現　実数には小数による表記方法もあります．小数とは分数の分母を 10，100，1000 などにそろえた時の分子の値の左端に「0.」をつけて表記したものです．例えば，

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

となります．当然，$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{5}{10} = 1 + 0.5 = 1.5$ となります．他には

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25$$

と表記します.「.」を小数点といい，小数点の右 1 つ目の数を「小数点 1 桁」，右 2 つ目の数を「小数点 2 桁」といいます.

パーセント (%，百分位）表記

天気予報などでよく目にするパーセント（%）という言葉は，分母を 100 とした分数の分子部分を指す.

$$\text{(例)}\qquad \begin{aligned} 50\% &= 0.50 = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \\ 25\% &= 0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

絶対値と符号

これまでに，数の全体像には自然数，整数，実数という分類があるという説明をしました．数にはもっといろいろな種類のものがありますが，自然数，整数，実数だけ理解すれば十分です．また，自然数は整数の一部であり，整数は実数の一部なので，特に実数が重要になります．**今後出てくるさまざまな数は実数全体の中のどれか一つ**というように理解して下さい．

視覚的には数直線上のどこか一点を 0（原点）を基準にして表したものが実数です．実数のうち 0（原点）からの距離を表すのが**絶対値**です．絶対値は正の値であれば数値そのもの，負の値であれば数値のみの部分をいいます（-4 なら 4）．また，実数のうち 0 からの方向を表すものが**符号**です．0 よりも右にある点にはプラス（$+$）の記号をつけ（るか何もつけないか），0 よりも左にある点にはマイナス（$-$）の記号をつけて表します．すなわち，**実数とは数直線上における一点を 0（原点）を基準として距離や大きさを表す絶対値と方向を表す符号 ($\pm$) で示したものです．**

絶対値を表す場合には $|4|$ という表記をします．$|4|$ は「4 の絶対値」という意味です．$|-4|$ は「-4 の絶対値」という意味なので 4 となります．

絶対値と符号

絶対値とは，数の「大きさ」を表すもので，0 からの距離を表す．

$\pm x$ の絶対値を $|\pm x| = x$ と表す．

$\pm$（プラス・マイナス）は符号といい，0 よりも大きいか小さいかを表す．

変数，定数と未知の定数（パラメータ）

ところで，数学には 1，2，3 とか $\frac{1}{5}$ のような具体的な数字と，x や y のような記号が出てきます．多くの人は「記号だと分かりにくい」というように感じると思います．しかし，数学で記号を用いるのは理由があります．それは，**その記号がどのような値なのか分からないということを明示する**ためです．例えば記号 x に対して以下の計算をするとします．

$$x + 2$$

これは「x に 2 を足す」ということを意味します．

　このような記号を**未知の数**といいます．特に,「未知の変数 x」といった場合，x の中身はいろいろと変わり得ます．x が 0 であれば $0+2=2$，x が 1 であれば $1+2=3$，x が 2 であれば $2+2=4$ となります．このように，x はいろいろと変わり得る値であることから**変数**といいます．一方，$x+2$ の 2 は変数 x がどのような値を取っても必ず 2 に決まっている（定まっている）ので**定数**といいます．

　未知の数は変数だけとは限りません．**未知の定数**というものもあります．未知の変数 x と未知の定数 a に対して次の計算をするとします．

$$x+a$$

これは x が 0 であれば $0+a=a$，x が 1 であれば $1+a$，x が 2 であれば $2+a$ となります．未知の定数 a は「まだ値が確定していないだけで，基本的には 1 点に決まっている数」ということです．このような未知の定数を**パラメータ**と呼びます．

　同じ記号でも変数（まだ値が確定しておらず，またどのような値でも取り得る数）とパラメータ（まだ値が確定していないが，基本的には 1 点に決まっている数）があるので注意が必要です．

変数，定数，未知の定数（パラメータ）

- 変数とは，値が確定しておらずどのような値でも取り得る数．通常は記号で表記する．
- 定数とは，値が確定している実数上の数．
- パラメータとは，値が確定していないが実数上のどこかの一点を取る数．通常は記号で表記する．

累乗

変数 x を 2 回掛け合わせる操作を「x を 2 乗する」といいます．この場合，$x \times x = x^2$ と表記します．一般に x を n 回掛けあわせる操作を

$$x^n$$

と表現します．これを **x の n 乗**といいます．x を**基数**，n を**指数**あるいは**べき数**と呼びます．

指数 n は 1，2，3，4 のような自然数とは限りません．$\frac{1}{2}$ のような分数を取ることもありますし，-1 ということもあります．もちろん 0 ということもあります．ここで，x^0 はとても大事なので定義しておきます．

0 乗について

数 x を 0 乗したものは**必ず 1 になることにする**．すなわち，あらゆる数 x に対して，

$$x^0 = 1$$

累乗と添え字

累乗が出てきたところで，数学の表記上の注意点を示しておきます．x^n は通常 x の n 乗を意味しました．しかし，数学を経済学に応用する場合，**添え字**という表記法を用います．例えば，Y が国内総生産（GDP）を表すとします．GDP は毎四半期，毎年公表されます．2014 年の GDP，2015 年の GDP というように複数年の GDP を扱う必要がある場合は，Y_{2014} というように右下に年を添えて Y が 2014 年の GDP であることを明示します．この右下に添えて表記する方法を添え字（下添え字）といいます．

一方，上添え字という表記法もあり，これは累乗の表記と大変紛らわしいので注意する必要があります．例えば，日本の GDP とアメリカの GDP を Y を使ってそれぞれ表記する場合には，Y^J（Japan）や Y^{US}（United States）などと表しますが，Y^J は Y の J 乗というようにも解釈できてしまいます．この場合はどちらの可能性もあるので，授業やテキストで文字が何を意味するのかをきちんと確認するように心掛けましょう．

平方根

変数 x を 2 回掛け合わせる操作を「x を 2 乗する」といいました．今度は,「2 乗すると x になる」という操作について考えましょう．例えば,「2 乗すると 25 になる数」のことを「25 の平方根」といいます．2 乗すると 25 となる数は 5 と -5 ですので，25 の平方根 $= \pm\sqrt{25}$ と書き表します．

平方根には若干の注意が必要です．例えば,

$$x^2 = 3$$

であれば,「ある変数 x を 2 乗すると 3 になる」という意味なので，1 の 2 乗は 1，2 の 2 乗は 4 なので，1 より大きく 2 より小さい値かなという見当がつきます．例えば 1.5 の 2 乗は 2.25 なので，x は 1.5 より大きな値のようです．1.8 の 2 乗は 3.24 なので x は 1.8 より小さな値のようです．1.7 の 2 乗は 2.89 なので，x は 1.7 より大きく 1.8 より小さな値のようです．このようにいろいろな数を当てはめていくと $x^2 = 3$ を満たす x に近い数値を絞ることができそうです．例えば，1.732 を 2 乗すると 2.99824 という数字になることから，$x^2 = 3$ を満たす x は 1.732 に近い値を取るという見当がつきます．しかし，小数点以下が無限に続いてしまいそうです．このような場合は，分数や小数で表現することはあきらめて

$$x = \sqrt{3}$$

という記号を使って数を表現します．

平方根を計算できない数　なお，$x^2 = -1$ は計算できません．より正確には「$x^2 = -1$ を満たす x は実数ではない」ので注意してください．自然数において足し算の逆の操作（引き算）ができないことがあり，整数において掛け算の逆の操作（割り算）ができないことがあるのと同様，実数では累乗の逆の操作（根の計算）ができないことがあります．一般に数というのは分解する操作に弱いようです[3]．

[3] $x^2 = -1$ を満たす x を表現するためには**複素数**という数を考える必要があります．経済学で使う範囲で $x^2 = -1$ となるような x を考えることは非常にまれ（通常の大学学部レベルではほとんどありません）なので，あまり気にしなくてかまいません．むしろ何かの 2 乗が負の値を取ったら，自分の計算ミスか出題ミスを疑ってください．

A.3 式の基本ルール

A.3.1 加減乗除（$+ - \times \div$）とは何か

実数は，数直線上のある点と 0（原点）との**距離（絶対値）**に 0（原点）の右か左かの**方向**を表す + か − の符号をつけたものとして把握します．このように考えると，加減乗除（$+ - \times \div$）の意味も明確になります．x と a を実数上の未知の数とします．

加法（足し算）と減法（引き算）　a が正であるとします．

- 加法（足し算）$x + a$ とは実数上の点 x から右側に a だけ移動させる操作である．
- 減法（引き算）$x - a$ とは実数上の点 x から左側に a だけ移動させる操作である．

乗法（掛け算）　a が正であるとします．

- 乗法（掛け算）$a \times x$ とは x と同じ方向に 0（原点）から x を a 個分並べる操作である．
- 乗法（掛け算）$-a \times x$ とは x を逆方向にして 0（原点）から x を a 個分並べる操作である．

例えば，2×3 であれば，0 より右にある 3 を 0（原点）から同じ方向に 2 個並べたものなので $3 + 3 = 6$ です．$-1 \times (-1)$ は 0 より左にある -1 を反対方向に変えて 0（原点）から 1 個並べたものなので 1 です．負値と負値を掛けると正値になるのはこのためです．

除法（割り算）　a は正であるとします．

- 除法（割り算）$x \div a$ とは x の長さを a 等分に分割したものの 1 片の長さを意味しています．割り算の答えは $x \div a = \frac{x}{a}$ というように分数によって表現されます．

A.3.2 計算の優先順位

数学にはさまざまな計算記号があります．代表的なものは

- 加減乗除（$+ - \times \div$）$\cdots$ 四則演算と呼ばれる計算記号．

- 累乗（x^2 のように肩に乗っかった形のもの）.
- 括弧 $[\{()\}] \cdots$ 計算順序を表す記号．$[\quad] =$ 大括弧，$\{\quad\} =$ 中括弧，$(\quad) =$ 小括弧[4]

この計算記号には，優先順位があるので，まず優先順位を覚えましょう.

計算記号の優先順位

1. 括弧内の計算
2. 累乗記号の計算
3. 乗法（掛け算；×）記号と除法（割り算；÷）記号の計算
4. 加法（足し算；＋）記号と減法（引き算；−）記号の計算

例として，次の計算問題を解いてみましょう.

$$3 + (4 - 5) \times 4 \div 2^2 + 10$$

まずは $(\quad)$ 内を最初に計算．$(4 - 5) = -1$ なので

$$3 - 1 \times 4 \div 2^2 + 10$$

次に累乗（2 乗部分）を計算．$2^2 = 4$ なので

$$3 - 1 \times 4 \div 4 + 10$$

次に掛け算，割り算を計算．$1 \times 4 \div 4$ のうち $1 \times 4 = 4$ なので $4 \div 4 = 1$

$$3 - 1 + 10$$

最後に足し算，引き算を計算，$3 - 1 + 10 = 12$．ということで，答えは 12.

[4]日本では中学校でこのように習ったはずですが，世界的には括弧 $\{[()]\}$ の順序が主流です.

例題 A-1　以下の計算問題を解きなさい．

1. $10 \times 3 - 5 \times 2^3 - 4 \div (5 - 1)$
2. $9 - 3 \div 3^0 + 2 \times (4 - 4)$
3. $\{3 \times (2^2 + 3^3) + 1 \times (3^1 + 4^2)\} \times 2^2$

割り算と分数の計算についての注意

この計算順序では，割り算の取り扱いで少し混乱することがあります．割り算の計算ルールは

割り算の計算規則

- 割り算は，割り算記号（÷）の直後にある数を分母，1 を分子とする分数に変換して掛け算として扱う．

というものです．例えば，

$$2 \div 3 \times 6$$

であれば，割り算記号の直後に 3 があります（$\div 3$ の部分）．これを $\times\frac{1}{3}$ に変換します．すなわち，

$$2 \times \frac{1}{3} \times 6 = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

となります．このように，割り算を分数の掛け算として扱うとよいでしょう．

加減乗除の計算手順のルールと分数の掛け算が割り算であることを覚えれば，分数の足し算についてのよくある間違いもなくなるはずです．例えば

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

を

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1+1}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \tag{A.1}$$

としてしまう例です．当然ですがこれは間違いです．なぜならば

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1\div 2+1\div 4$$

だからです．足し算記号よりも割り算記号が優先されるので，どうあっても (A.1) 式のような計算は認められません．

分数とは「分子を分母の数に等分割したときの 1 片の長さ」です．$\frac{1}{2}$ は 1 を 2 等分したときの 1 片の長さで，$\frac{1}{4}$ は 1 を 4 等分したときの 1 片の長さです．ここで，**$\frac{1}{2}$ は 1 を 2 等分したときの 1 片の長さであり，かつ，1 を 4 等分した時の 1 片の長さ 2 つ分**ということに気づけばしめたものです．$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ は，1 を 4 等分した時の 1 片の長さ 2 つと，1 を 4 等分したときの 1 片の長さの合計であり，それは 1 を 4 等分した時の 1 片の長さ 3 つ分です．すなわち，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ となります．割り算と分数は実は非常に難解なので，また改めて説明します．

A.3.3　記号の計算

記号が入った数式（文字式）で特に注意しなければならない計算ルールがあります．

掛け算記号の省略

記号の計算のルール～掛け算記号の省略

- 記号の数式では，掛け算記号 ($\times$) を省略してよい．すなわち，

$$a\times b=ab$$

当然ですが，$2\times 3=23$ としてはいけません．$2\times 3=6$ です．記号が入ってくる式にのみ適用できるルールです．他にも例として次のようなものがあります．

例)　$3\times x\div 4\times x=3x\div 4\times x=\frac{3}{4}x\times x=\frac{3}{4}x^2$

例)　$(3\times x)\div(4\times x)=(3x)\div(4x)=3x\times\frac{1}{4x}=\frac{3}{4}$

足し算はこのような表記ができないので注意してください．すなわち，「$a+b=ab$」ではありません．帯分数を使ってはいけないと説明した時にもいいましたが，省略してよいのは掛け算記号のみです．

例題 A-2　以下の計算問題を解きなさい．

1. $2a \times \frac{1}{2a}$
2. $2a \div 4a$
3. $(2a+a) \div (4a-a)$

交換法則・結合法則

計算順序の入れ替えに関するルール〜交換法則・結合法則

- 加法（足し算）と乗法（掛け算）の計算順序は入れ替え可能．

$$\text{交換法則}\begin{cases} a+b=b+a \\ ab=ba \end{cases}$$

$$\text{結合法則}\begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c \\ a(bc)=(ab)c \end{cases}$$

- 減法（引き算），除法（割り算）は上の法則が成立しないので注意．

$$a-b \neq b-a \qquad a \div b \neq b \div a$$

$$a-(b-c) \neq (a-b)-c \qquad a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$$

交換法則・結合法則は，具体的な数を考えれば明らかです．

例)　$2+3=3+2=5$

例)　$2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$

例)　$2+(3+4)=(2+3)+4=9$

例)　$8 \times (4 \times 2) = (8 \times 4) \times 2 = 64$

また，減法と除法では交換法則・結合法則が成立しないのは，以下の例より明らかです．

例)　$2 - 3 = -1$ だが，$3 - 2 = 1$

例)　$2 \div 3 = \frac{2}{3}$ だが，$3 \div 2 = \frac{3}{2}$

例)　$2 - (3 - 4) = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$ だが，$(2 - 3) - 4 = -1 - 4 = -5$

例)　$8 \div (4 \div 2) = 8 \div 2 = 4$ だが，$(8 \div 4) \div 2 = 2 \div 2 = 1$

分配法則

括弧の計算ルール～分配法則

- 括弧の計算は以下のような関係がある．

$$\text{分配法則}\begin{cases} a(b+c) = ab + ac \\ (a+b)c = ac + bc \end{cases}$$

計算の優先順位のルールからすると，(　) 内は優先的に計算しなければなりません．しかし，記号の式の場合，(　) 内を計算して単一の数になるわけではありません．この場合，(　) 内の計算をしないで乗法の計算をしてもよいことになります．ここで「(　) を外す」計算ルールにしたがって，$a(b+c) = ab + ac$ となります．

具体的な数字で確かめてみましょう．計算式

$$2 \times (5 + 1)$$

では，(　) 内を計算すると $5 + 1 = 6$ となりますので，$2 \times 6 = 12$ です．一方で，括弧を外して計算すると $2 \times (5+1) = 2 \times 5 + 2 \times 1 = 10 + 2 = 12$ と計算できます．

例)　$4(x + y) = 4x + 4y$

例)　$5x + 5y = 5(x + y)$

例)　$4x + 3x = (4 + 3)x = 7x$

また，加減乗除よりも累乗が優先されるというルールを応用すると，次のように展開することができます．

例)　$ax^2 + bx^2 + cx + dx = (a+b)x^2 + (c+d)x$

例)　$3x^2 + 4x^2 + 5x + 6x = (3+4)x^2 + (5+6)x = 7x^2 + 11x$

括弧の計算ルールを応用すると，次のように展開することができます．

$$
\text{例)}\quad \begin{aligned}(2x+4)(2x+3) &= (2x+4)2x + (2x+4)3 \\ &= 2x \times 2x + 4 \times 2x + 2x \times 3 + 4 \times 3 \\ &= 4x^2 + 8x + 6x + 12 \\ &= 4x^2 + 14x + 12\end{aligned}
$$

$$
\text{例)}\quad \begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = (x+y)x + (x+y)y \\ &= x \times x + y \times x + x \times y + y \times y \\ &= x^2 + yx + xy + y^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}
$$

例題 A-3　以下の式を展開しなさい．

1. $x(5 - 2y^2)$
2. $(2x + 4y)^2$
3. $(3x + 2y)(4x - y)$

式の次数と指数の計算ルール

数式には**次数**というものがあります．文字式のうち 2 乗された文字の部分を **2 次項**といいます．同様に 3 乗された文字の部分を **3 次項**といいます．n 乗された文字の部分を n **次項**といいます．式は，その式の中に含まれる最大の次数に応じて「〇次式」と呼ばれます．すなわち，

$$x^2 + 2xy + y^2$$

であれば，x の 2 次式，y の 2 次式です．

$$x^3 + x^2 + 2xy + y^2$$

であれば，x の 3 次式，y の 2 次式です．

また，ある定数に変数 x が掛かっている場合，その定数を**係数**と呼びます．ある定数に変数 x が掛かっていない場合，その定数を**定数項**と呼びます．例えば，

$$5x^2 + 4x + 3$$

であれば x^2 に掛かる 5 を「x の 2 次項の係数」と呼び，x に掛かる 4 を「x の 1 次項の係数」と呼び，3 を定数項と呼びます．

一般に x を n 回掛けあわせる操作を

$$x^n$$

と表現し，**x の n 乗**といいました．指数の計算ルールについても説明しておきましょう．

指数の計算規則

- $x^a \times x^b = x^{a+b}$

  例) $2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^7$

- $(x^a)^b = x^{ab}$

  例) $(3^2)^3 = (3^2) \times (3^2) \times (3^2) = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3^6$

- $(x^a \times y^b)^c = x^{ac} \times y^{bc}$

  例) $(2^2 \times 3^3)^2 = (2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3) = 2^4 \times 3^6$

- $x^{-1} = \frac{1}{x}$

  (理由) $x^0 = 1$ と定義しているので，$x^{1-1} = 1$ である．ということは，$x^{1-1} = x^1 \times x^{-1} = 1$ となるため，$x^{-1} = \frac{1}{x}$ となる．

指数の計算規則を利用すると，平方根を累乗で表記することができ，平方根の計算規則が得られます.

平方根の累乗表記

- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

(理由)$\sqrt{x}$ は 2 乗すると x になる数である. $x^{\frac{1}{2}}$ を 2 乗すると $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}\times 2} = x$ である.

- $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

(理由)$\sqrt{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = (x \times y^{-1})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \times y^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \times (y^{\frac{1}{2}})^{-1} = \sqrt{x} \times (\sqrt{y})^{-1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

例題 A-4　以下の計算問題を解きなさい.

1. $10^2 \times 10^1$
2. $(4^3)^2$
3. $5^2 \times 5^{-2}$
4. $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$

A.4　方程式の基本ルール

A.4.1　方程式の意味と計算ルール

数式を操作する最低限のルールを覚えたところで，次は数式の持つ意味を体感してみましょう．そこで，もっとも基本となる数式である方程式を考えてみましょう．

方程式

未知の数（記号）の満たすべき条件が等式（「=」でつながれた式）で表された時，その等式を**方程式**という．

$a = b$ であれば「a は b と等しい」という意味を表します．$a = 2c$ であれば「a は c を 2 倍したものに等しい」という意味を表します．方程式というと複雑ですが，意味としては「あるものと他のものが同じであることを表す式」というニュアンスです．

例えば，

$$2x + 1$$

は方程式ではなく，ただの式（数学的な操作を表すただの文字列）です．これは「ある未知の数 x を 2 倍し，1 を加える」という操作の手順を意味するだけです．未知の数が $x = 0$ であれば $2 \times 0 + 1 = 1$，未知の数が $x = 1$ であれば $2 \times 1 + 1 = 3$，未知の数が $x = 2$ であれば $2 \times 2 + 1 = 5$ を取ります.「未知の数 x に対して一定の操作を行いなさい」といういわば命令のようなものです．

一方，方程式は

$$2x + 1 = 4$$

というような形式を取ります．これは「ある未知の数 x を 2 倍して 1 を加えると 4 になる」ということを意味しています．すなわち，これは**未知の数 x が満たすべき条件について述べていること**になります．この式は x の最大次数が 1 であるため，x の **1 次方程式**と呼ばれます．未知の数が $x = 1$ であれば $2 \times 1 + 1 = 3$ となり，未知の数が $x = 2$ であれば $2 \times 2 + 1 = 5$ となるので，未知の数 x が 1 や 2 でないことは明らかです．それでは，未知の数 x はどのよ

うな値なのでしょうか．方程式の基本ルールを利用すると，このような条件を満たす x の値を決めることができます．これを**方程式を解く**といいます．また，条件を満たす x を**方程式の解（かい）**といいます．

方程式を解くためには方程式の操作の基本ルールを覚える必要があります．

方程式の操作の基本ルール

- 同じものに同じものを足して（引いて）も同じ．$x = y$ ならば $x + a = y + a$
- 同じものに同じものを掛けても同じ．$x = y$ ならば $ax = ay$

「$x = y$ ならば $x + a = y + a$」ということは，

例) $x - 5 = y$ ならば $(x - 5) + 5 = y + 5$．すなわち，$x = y + 5$ である．

例) $x + 5 = y$ ならば $(x + 5) - 5 = y - 5$．すなわち，$x = y - 5$ である．

「$x = y$ ならば $ax = ay$」ということは，

例）$5x = y$ ならば $\frac{1}{5}5x = \frac{1}{5}y$．すなわち，$x = \frac{y}{5}$ である．

例）$x = y$ ならば $\frac{1}{y}x = \frac{1}{y}y$．すなわち，$\frac{x}{y} = 1$ である．

A.4.2　1 次方程式の解

以上の方程式の操作の基本ルールを使って 1 次方程式 $2x + 1 = 4$ を解いてみましょう．

$$
\begin{array}{ll}
 & 2x + 1 = 4 \\
\Leftrightarrow & (2x + 1) - 1 = 4 - 1 \\
\Leftrightarrow & 2x = 3 \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{2} \times 2x = \dfrac{1}{2} \times 3 \\
\text{答え} & x = \dfrac{3}{2}
\end{array}
$$

方程式はもう少し複雑な形状を取ることもあります．

例) $3x - 3 = 3(2x - 7)$

$\Leftrightarrow$ $3x - 3 = 6x - 21$

$\Leftrightarrow\ 3x - 3 + 3 = 6x - 21 + 3$

$\Leftrightarrow\ 3x = 6x - 18$

$\Leftrightarrow\ 3x - 6x = 6x - 6x - 18$

$\Leftrightarrow\ -3x = -18$

$\Leftrightarrow\ (\frac{1}{3})(-3x) = (\frac{1}{3})(-18)$

$\Leftrightarrow\ -x = -6$

答え　$x = 6$

例題 A-5　以下の 1 次方程式を解きなさい．

1. $4 + 5x = -2x - 5$

2. $3 + 5x = 9 + 3x$

3. $2 + 7x = -10 - 4x$

A.4.3　2 次方程式の解

方程式で式の次数が 2 次のものを **2 次方程式**といいます．例えば以下のようなものです．

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

この式の意味は「ある未知の数 x を 2 乗したものと，未知の数 x を 2 倍したものと，1 を足し合わせると 0 になる」です．やや複雑ですが，2 次方程式も未知の数 x が満たすべき条件について述べたものです．どのような x がこの 2 次方程式の解となるのでしょうか．

2 次方程式の解を見つける操作にはさまざまな方法があります．例えば

$$x^2 = 4$$

であれば，意味が「ある未知の数 x を 2 乗すると 4 になる」なので，0 の 2 乗は 0，1 の 2 乗は 1，2 の 2 乗は 4 と考えてみれば明らかに $x = 2$ です．よって，$x = -2$ であっても $x^2 = 4$ となることが分かります．$x^2 = 4$ の解は $x = \pm 2$（プラスマイナス 2 と読み，$+2$ と -2 とい

う意味）となります.

$$x^2 = 3$$

であれば,「ある未知の数 x を 2 乗すると 3 になる」という意味です．この場合，平方根記号をそのまま利用し，

$$x = \pm\sqrt{3}$$

が 2 次方程式の解となります.

例題 A-6　以下の 2 次方程式を解きなさい.

1. $x^2 = 100$
2. $x^2 = 20$
3. $x^2 = 5$

A.4.4　因数分解

次のような 2 次方程式を考えてみましょう.

$$x^2 + 2x = 0$$

$x^2 + 2x$ は $x(x + 2)$ と書きかえることができるので，

$$x(x + 2) = 0$$

となります．よって，$x = 0$ か $x = -2$ の時に，$x^2 + 2x = 0$ となることが分かります.

それでは，

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \tag{A.2}$$

はどうでしょうか．これは，一見すると複雑です．しかし，2 次方程式を 1 次式の掛け算の

形で表現できれば，割と簡単に解くことができます．例えば，$(x+1)(x+1)$ という 1 次式の掛け算を考えましょう．これを展開すると

$$
\begin{aligned}
(x+1)(x+1) &= (x+1)x+(x+1) \\
&= x^2+x+x+1 \\
&= x^2+2x+1
\end{aligned}
$$

となり，(A.2) 式の左辺と同じになります．よって，$(x+1)(x+1)=0$ が満たされます．したがって，$x=-1$ が解となります．

2 次方程式を解くヒントとして，2 つの 1 次式 $ax+b$ と $cx+d$ の掛け算を考えてみましょう．

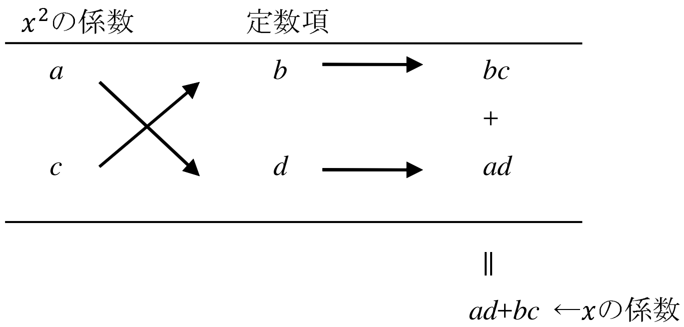
$$
\begin{aligned}
(ax+b)(cx+d) &= (ax+b)cx+(ax+b)d \\
&= acx^2+bcx+adx+bd \\
&= acx^2+(ad+bc)x+bd
\end{aligned}
$$

2 次方程式の 2 次項，1 次項の係数と定数項には，それぞれ掛ける前の 1 次式の 1 次項の係数と定数項が表れています．よって，2 次方程式が与えられた時，**その係数をいろいろと操作することで 1 次式の掛け算の形に変換できそうです**．このような変換を行うことを**因数分解**と呼びます．

因数分解のたすきがけルール

- 図 A.4 のように 2 次項の係数を a と c，定数項を b と d に分解する．
- 分解した 2 次項の係数と定数項をたすき掛けして，ad と bc の和 $ad+bc$ を計算する．
- $ad+bc$ が 2 次式の 1 次項の係数と等しければ，因数分解成功．
- a と c が分解した 1 次式の 1 次項の係数，b と d が分解した 1 次式の定数項になる．

図 A.4: 因数分解



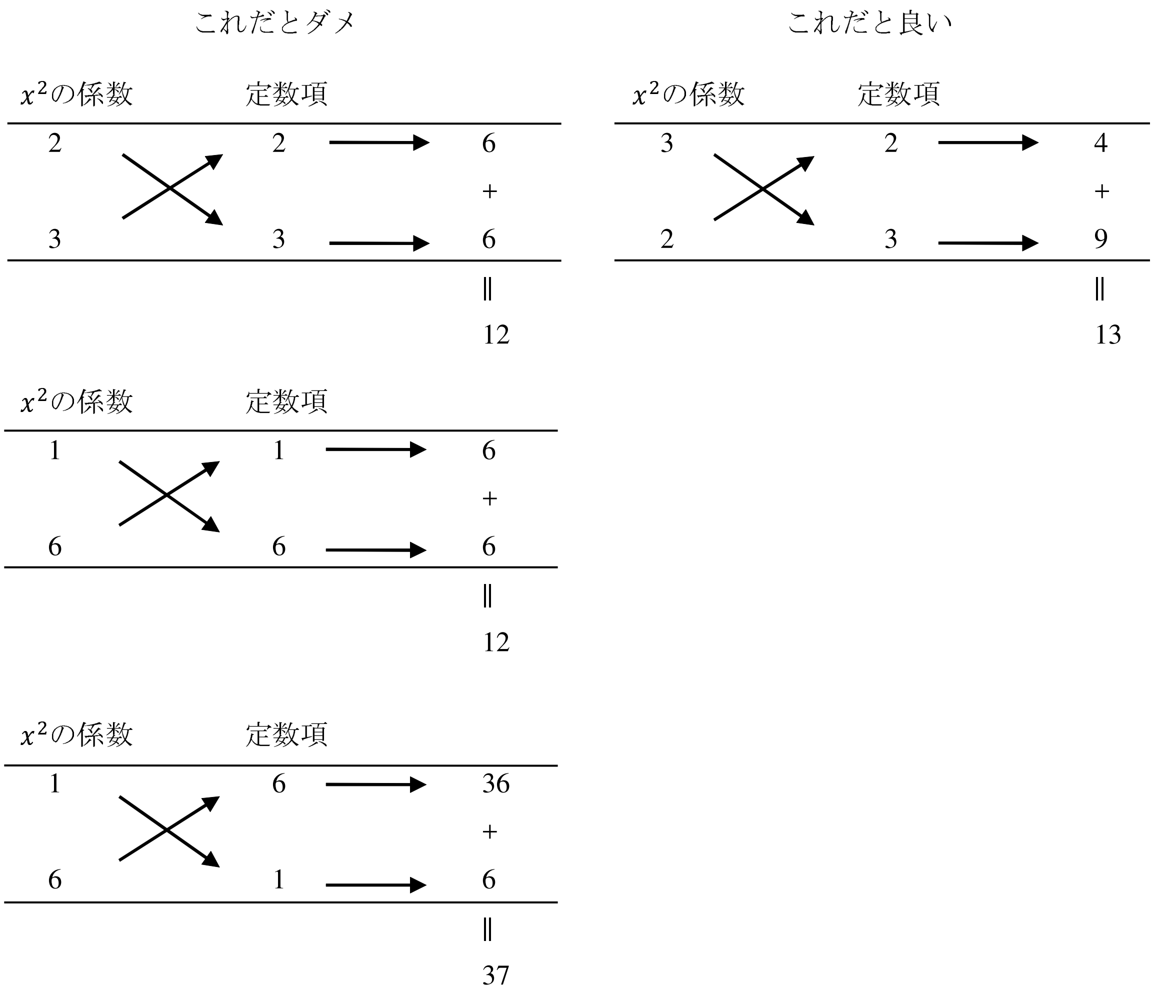
因数分解の例題

次の 2 次式を因数分解してみましょう．

$$6x^2 + 13x + 6$$

2 次項の係数 6 は 1×6，6×1 と 2×3，3×2 に分解できます．定数項の 6 も 1×6，6×1 と 2×3，3×2 に分解できます．たすきがけで並べてみましょう．そうすると，図 A.5 で示すように，$(3x + 2)(2x + 3)$ と分解できることが分かります．

図 A.5: 因数分解の例題 $6x^2 + 13x + 6$ の場合



例題 A-7 以下の 2 次関数を因数分解しなさい．

1. $5x^2 + x - 4$
2. $2x^2 + 5x + 2$
3. $10x^2 + 7x - 6$

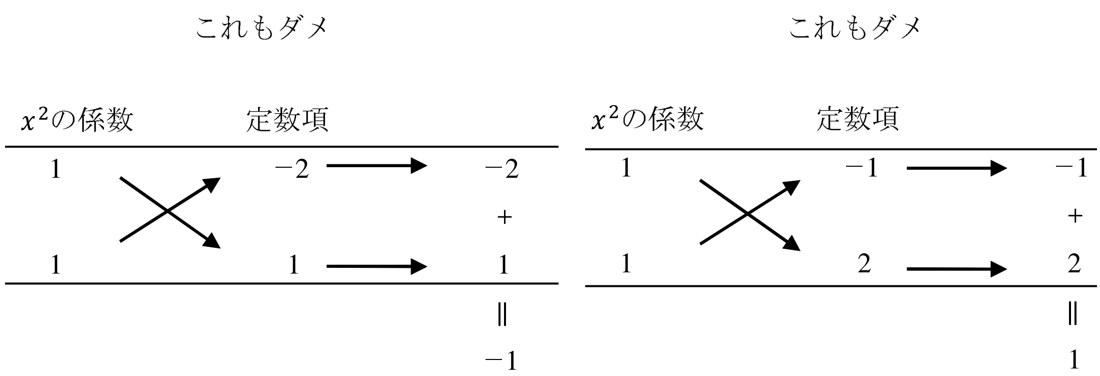
解の公式

残念ながら，すべての 2 次方程式が必ず因数分解できるわけではありません．例えば

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

を考えてみましょう．2 次項の係数 1 は 1×1 と分解できます．定数項の -2 は -2×1，-1×2 に分解されます．これをたすきがけで並べると図 A.6 のようになり，因数分解できないことが分かります．

図 A.6: 因数分解の例題 $x^2 + 2x - 2 = 0$ の場合



しかし，

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x - 2 = x^2 + 2x + 1 - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2x + 1 = 3 \end{aligned}$$

と変形すると，左辺の定数項 1 は 1×1 に分解されます．これをたすきがけで並べると，$(x+1)(x+1)$ となることが分かります．

$$(x+1)(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 3$$

となるので，$(x+1)^2 = 3$ です．よって，

$$x + 1 = \pm\sqrt{3}$$

であることから，

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

となります．このように，因数分解できなくても 2 次式の 2 次項と 1 次項部分を強引に 1 次式の掛け算の形に変形できれば，2 次方程式の解を求めることができそうです．

解きたい 2 次方程式を

$$ax^2 + bx + c = 0$$

とします．これを変形して

$$(x+A)^2 = B$$

とできれば，$x+A = \pm\sqrt{B}$ より $x = -A\pm\sqrt{B}$ とできます．ですから，A と B をもとの 2 次方程式の係数 a，b，c によって表現できればよいということになります．$(x+A)^2 = x^2+2A+A^2$ なので，

$$\begin{aligned} & x^2 + 2Ax + A^2 = B \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2Ax + A^2 - B = 0 \end{aligned}$$

です．なんとなく解きたい 2 次方程式に近づいてきましたね．そこで，もとの 2 次方程式を次のように変形します．

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \end{aligned}$$

です．2 つの式を並べてみましょう．

$$
\begin{aligned}
&x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&x^2 + 2Ax + A^2 - B = 0
\end{aligned}
$$

この 2 本の式が一致すればよいわけです．ということは次の関係があります．

$$2A = \frac{b}{a} \tag{A.3}$$

$$A^2 - B = \frac{c}{a} \tag{A.4}$$

(A.3) 式から $A = \frac{b}{2a}$ だということが分かります．これを (A.4) 式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - B = \frac{c}{a} \\
\Leftrightarrow \quad & B = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}
\end{aligned}
$$

右辺を頑張って整理しましょう．

$$
\begin{aligned}
B &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\
&= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4a}{4a}\frac{c}{a} \\
&= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \\
&= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}
\end{aligned}
$$

ということで，$(x + A)^2 = B$ は以下のような形であればよいということになります．

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{A.5}$$

よって，(A.5) 式を x について解くと，

$$\begin{aligned} x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\ &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

となります．このように，2 次方程式の解を求めるための公式が得られました．

2 次方程式の解の公式

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解は以下のように書ける．

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

例題 A-8　以下の 2 次方程式を解きなさい．

1. $5x^2+x-4=0$
2. $2x^2+5x+2=0$
3. $10x^2+6x-5=0$
4. $10x^2+6ax-5b=0$

付 録B　数と数の関係

B.1　分数と比例関係

B.1.1　基準を決めて数える〜分数の考え方

数（かず）を習った時,「1」はミカンが 1 つ,「2」はミカンが 2 つ，$\cdots$ と習った人は多いと思います．ミカンが 2 つある場合，1 つ，2 つと数えることができます．しかし，これはそれほど当たり前の話ではありません．ミカンが 1 つと柿が 1 つある時，どう数えればよいのでしょうか．$x+y$ は $x+y$ だというように，ミカンが 1 つと柿が 1 つの合計はミカンが 1 つと柿が 1 つとしか言えないように感じられます．この意味を深く考えてみましょう．

ミカンが 1 つと柿が 1 つの合計は「2」ではない感じがするのは，厳密にいうと「ミカン 1 個と柿 1 個の合計をミカンの個数で測るとミカン 1 個で柿は数えられない．柿の個数で測ると柿 1 個でミカンは数えられない」と感じるからです．では考え方を変えて，ミカン 1 個と柿 1 個の合計を果物の数で測るとどうなるでしょうか．ミカンも柿も果物ですから,「ミカン 1 個と柿 1 個の合計を果物の個数で測ると果物 2 個」ということになります．

この議論が表しているのは,「1」や「2」などの**数というのものは何を基準にして数えるかが非常に重要である**ということです．言いかえると,「基準が変われば数え方は異なる」ということです．数が持っている意味を厳密に考えるためには，その数が何を基準にして，何を数えたものかを明確に考えなければなりません．すなわち，**数が意味をもつためには「数える対象」と「数える基準」の二種類が必要になります．**これらを明確にしながら数を表現したものが分数です．数える対象を**分子**といい，数える基準を**分母**といいます．

分数・割り算と単位の変換

分数や割り算と数える基準の関係について説明します．リンゴが x 個あるとします．

$$\text{リンゴの個数}\, x\, \text{個}$$

この x 個のリンゴを数える基準を変えてみましょう．

まず，リンゴ 2 個で 1 パックのパック詰めリンゴを作ることにします．

$$1\,\text{パック} = \text{リンゴ}\,2\,\text{個}$$

リンゴが x 個ある時，何パックできるでしょうか．この操作は x を 1 パック当たり 2 個に詰め直す作業なので，

$$\frac{x\,\text{個}}{2\,\text{個}\,(=1\,\text{パック})} = \frac{x}{2}\text{パック}$$

です．もしリンゴが 4 個（$x = 4$）であればパック詰めリンゴは 2 パックできます．

では，リンゴを 2 等分し「カットリンゴ」として売り出したとしましょう．

$$1\,\text{カット} = \text{リンゴ}\frac{1}{2}\text{個}$$

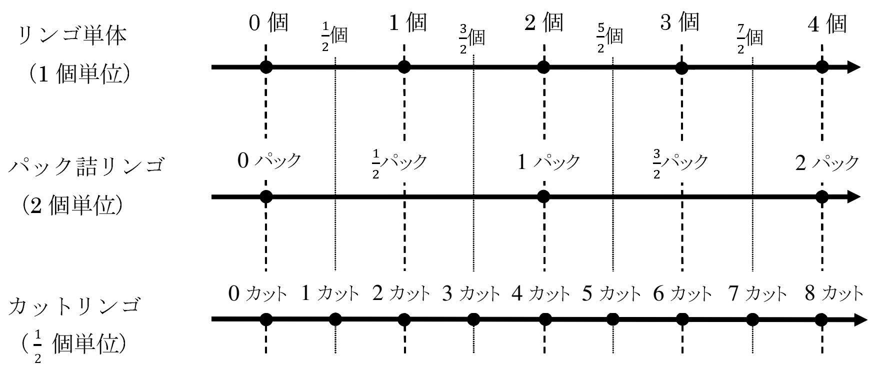
この操作は x を 1 カットリンゴ当たり $\frac{1}{2}$ 個に切り分ける作業なので，リンゴが x 個ある時，カットリンゴは

$$\frac{x\,\text{個}}{\frac{1}{2}\text{個}\,(=1\,\text{カット})} = \frac{x}{\frac{1}{2}}\text{カット} = 2x\,\text{カット}$$

となります．もしリンゴが 4 個（$x = 4$）であればカットリンゴは 8 カットできます．

この変換を示したものが図 B.1 です．一番上がリンゴ 1 個を基準として測ったリンゴの数です．真ん中はリンゴを 1 パック（=2 個）を基準で測ったリンゴの数です．一番下はリンゴを 1 カット (=$\frac{1}{2}$ 個）を基準で測ったリンゴの数です．例えば，リンゴ 2 個というのはパック詰めリンゴを基準とすると 1 パック，カットリンゴを基準とすると 4 カットということになります．すなわち，**「割るという操作」は計算単位（数える基準）を変える操作である**ということが分かります．具体的な例をいくつか紹介します．

図 B.1: 割り算・分数と単位の変換



試験の成績　ある科目の中間試験の結果が 43 点だったとしましょう．この 43 点は単なる数直線上の一点を表すにすぎません．この点の意味をどう解釈すればよいでしょうか．ここで解釈の基準として中間試験が 100 点満点だったとしましょう．すると，43 点は $\frac{43}{100} = 0.43 = 43\%$ ということになります．一方，中間試験が 50 点満点だったとすると，43 点は $\frac{43}{50} = \frac{86}{100} = 0.86 = 86\%$ ということになります．合格基準点や平均点にも依存するので何とも言えませんが，単純に考えると 43%しか取れていないのは結構悪そうですし，86%も取れているのはかなり良さそうです．試験の成績は満点が何点かなどの基準とセットで初めて意味を持つことが分かります．

時間の測り方　時間の測り方も基準が明確であることが重要な例です．1 分は 60 秒，1 時間は 60 分，1 日は 24 時間です．例えば 1 分 15 秒というのは，分に基準を統一すれば $1 + \frac{15}{60} = 1 + \frac{1}{4} = 1 + 0.25 = 1.25$ となり 1.25 分です．秒に基準を統一すれば $60 + 15 = 75$ となり 75 秒です．ここで秒を基準にして 75 秒分を 60 秒（=1 分）で割るという操作が明確になるように式を書いてみましょう．

$$\frac{75\,\text{秒}}{60\,\text{秒}\ (= 1\,\text{分})} = \frac{60\,\text{秒} + 15\,\text{秒}}{60\,\text{秒}\ (= 1\,\text{分})} = 1\,\text{分} + \frac{15\,\text{秒}}{60\,\text{秒}\ (= 1\,\text{分})} = 1\,\text{分} + 0.25\,\text{分} = 1.25\,\text{分}$$

こうして書いて見ると，75 秒が 1.25 分であるとは,「60 秒 (=1 分) で割る」という操作が「秒」という単位で表された時間の長さを「分」という単位に表現し直す操作であることが分かるでしょう.

お金と為替　お金の数え方も基準が重要になります．缶ジュースが 1 本 130 円で売られているとします．130 円というのは 1 円が 130 枚分です．もちろん 100 円玉 1 枚と 10 円玉 3 枚でも同じことです．ところで，日本のお金は「円」を単位としていますが，アメリカのお金は「ドル」を単位としています．日本のお金はアメリカに行くと通用しません．同様に，アメリカのお金は日本では通用しません．アメリカに旅行して何かを買おうと思ったら，日本のお金「円」をアメリカのお金「ドル」と交換しなければなりません．このようにある国のお金を他の国のお金と交換することを**外国為替**といいます（為替は「かわせ」と読みます）.また，交換する際の交換比率を**為替レート**といいます.「1 ドル 100 円から 1 ドル 110 円へと 10 円の円安になった」というようなニュースを聞いたことがあるのではないでしょうか．なぜ 100 円から 110 円になることが円安なのでしょうか．為替レートの意味を考えてみましょう.「1 ドル 100 円」とは「1 ドルを手に入れるために 100 円必要である」という意味です．すなわち，

$$1\,\text{ドル}=100\,\text{円}$$

ということを意味します．これは「**1 ドルの価値を円を単位として表している**」ことになります．例えば 100 ドルを手に入れるためには 10000 円必要となります．それでは，**1 円の価値をドルを単位として表わしたらどうなるのでしょうか**．10000 円は 100 ドルと等しいのだから，1 円は 0.01 ドルということが直観的に分かるでしょう．では，1 ドル 110 円の場合に 1 円は何ドルとなるでしょうか．ちょっとややこしそうですね．ここで,「割るという操作が単位を変える操作である」という点を思い出しましょう．1 ドル=110 円であるので，1 円を 110 円で割ればドルで測った円の価値を計算することができます.

$$\frac{1\,\text{円}}{110\,\text{円}\,(=1\,\text{ドル})} = 0.00909...\text{ドル}$$

同様に，1 ドル=100 円の時に 1 円が 0.01 ドルだったのは次の計算をしていることになります．

$$\frac{1\text{円}}{100\text{円}\,(=1\text{ドル})} = 0.01\text{ドル}$$

ここで，1 円を買うのに必要なドルの量に注目して為替レートを考えてみましょう．1 ドル=100 円の時，1 円の価値は 0.01 ドルでした．一方，1 ドル=110 円の時，1 円の価値は 0.009 ドルでした．並べて書くと

$$1\text{ドル} = 100\text{円} \quad \Leftrightarrow \quad 1\text{円} = 0.01\text{ドル}$$
$$1\text{ドル} = 110\text{円} \quad \Leftrightarrow \quad 1\text{円} = 0.009\text{ドル}$$

となります．このようにすると，**1 ドル=100 円から 1 ドル=110 円となることで，1 円の価値が 0.01 ドルから 0.009 ドルへと低下していることが分かります．**すなわち，円の価値が低下（=円安）になっているわけです．一般的な書き方で 1 ドル=e 円とします．この時，1 円=$\frac{1}{e}$ ドルとなります．

例題 B-1　以下の問題について，計算しなさい．

1. 4500 秒は何時間か？
2. 鉛筆が 48 本ある場合，何ダースあるといえるか？
3. 1 ドルが 100 円，1 ユーロが 160 円の場合，1 ドルは何ユーロか？

変化率・成長率　経済学では，時間を通じた観察対象の変化がとても重要になります．例えば，1 ドル=100 円から 1 ドル=110 円への円安は，円・ドル為替レートが 10 円変化したことを意味します．この 10 円という大きさは大きいのでしょうか，小さいのでしょうか．1949 年から 1971 年までは為替レートは 1 ドル=360 円に固定されていました．1 ドル=360 円から 1 ドル 350 円に 10 円変化するのと，1 ドル 100 円から 110 円に 10 円変化するのでは，同じ 10 円でも大きさは異なることが分かります．このように，**何かの動きや変化をその変化の前を基準にして表現したものを変化率といいます．**この変化率は x と y の相対的な大きさを表す概念であり，基準点（x）を分母とし，変化後の値（y）を分子とする分数から 1 を引

いた値となります．

$$x \text{ から } y \text{ への変化率} = \frac{y-x}{x} = \frac{y}{x} - 1$$

例えば，100 円から 110 円への変化率と，360 円から 350 円への変化率は次のように計算できます．

$$\frac{110-100}{100} = \frac{10}{100} = 0.1$$

$$\frac{350-360}{360} = \frac{-10}{360} = -0.02778$$

変化率は百分率（%）表記で書くことも多いです．その場合，上の例はそれぞれ10%，−2.778%となります．なお，変化率は成長している場合は成長率，上昇している場合は上昇率，減少している場合は減少率などいろいろな呼び名があります．

例題 B-2 以下の問いに答えなさい．

1. 銀行に 1 年間お金を預けると 0.1%の金利がつくとする．50 万円預けると 1 年後にはいくらになるか？
2. 銀行に預けた 100 万円が 1 年間で 105 万円となった．この場合の預金金利は何%か？
3. ある学生の体重が 1 年間で 12.5%増加した．現在の体重が 90kg である場合，1 年前の体重は何 kg か？

分数の計算ルール

分数の計算規則を説明します.

分数の計算規則 1

- 分数の逆数は分子と分母を入れ替える．すなわち，分数 $\frac{a}{b}$ に対して

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

(理由)$\frac{1}{\frac{a}{b}} \times \frac{b}{b} = \frac{b}{\frac{a}{b} \times b} = \frac{b}{a}$

例えば，$\frac{1}{2}$ の逆数 $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ は「1 の大きさを $\frac{1}{2}$ を基準にして測る」ということを意味します．1 は $\frac{1}{2}$ の 2 倍なので 2 となります.

分数の計算規則 2

- 分数の掛け算は分子同士，分母同士をそのまま掛ける．すなわち，

$$\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c} = \frac{bd}{ac}$$

例）$\frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{9}{8}$.

分数の計算規則 3

- 分数の割り算は割る項をひっくり返して（逆数にして）掛ける．すなわち，

$$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{1}{\frac{d}{c}} = \frac{b}{a} \times \frac{1}{\frac{d}{c}} \times \frac{c}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$$

例）$\frac{3}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

既に割り算とは「 ÷ の次にある数を逆数にして書ける操作」と説明しました．したがって，分数の割り算は分数を逆数にして掛けることに他なりません.

分数の計算規則 4

- 分数をより簡単な数の分数に書きかえることを**約分**という．約分できない分数を既約分数という．分数は必ず既約分数の形に直す．

例）$\frac{40}{50} = \frac{4\times10}{5\times10} = \frac{4}{5}$．$\frac{80}{100} = \frac{4\times20}{5\times20} = \frac{4}{5}$．約分することで分子と分母の数が違っても同じ値であることがわかります．

分数の計算規則 5

- 分数同士を足す（または引く）場合，基準（分母）をそろえる（通分する）必要がある．

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{d} = \frac{b}{a}\frac{d}{d} + \frac{c}{d}\frac{a}{a} = \frac{bd}{ad} + \frac{ca}{ad} = \frac{ac+bd}{ad}$$

例）$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$．分母は数える基準です．分母が異なれば数える基準が異なるわけですから，数える基準をそろえたうえで足す（または引く）必要があります．

例題 B-3　以下の数式を計算しなさい．

1. $\frac{5}{\frac{2}{3}} =$
2. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} =$
3. $\frac{2}{5} \div \frac{2}{10} =$
4. $\frac{250}{125} \times \frac{20}{15} \div \frac{88}{33} =$
5. $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} =$

B.1.2　比例関係

　これまで分数の操作が「対象」と「基準」の相対的な関係を表現する手段だということを説明してきました．相対的な関係を表現する手段には**比例関係**や**比例式**と呼ばれる方法もあります．例えば，2 は 1 の 2 倍です．また，4 は 2 の 2 倍です．よって，2 と 1，4 と 2 の相対的な関係はどちらも 2 倍で等しいということになります．このことを

$$2:1=4:2$$

というように表現します．同様に，

$$9:3=12:4$$
$$10:1=1000:100$$

などと書けます．相対的な大きさを表す比例式は，相対的な大きさを表す分数と密接な関係があります．例えば，$2:1$ は「2 と 1 の相対的な大きさ」という意味で「1 を基準にした時の 2 の大きさ」ともいえます．同様に，$4:2$ は「4 と 2 の相対的な大きさ」という意味で「2 を基準にした時の 4 の大きさ」ともいえます．よって，2 を 1 で基準化するということを明示的に書けば $\frac{2}{1}$，4 を 2 で基準化することを明示的に書けば $\frac{4}{2}$ となります．すなわち，

$$2:1=4:2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{1}=\frac{4}{2}$$

ということです．記号で書くと，

$$a:b=c:d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

両辺に bd をそれぞれ掛けると，

$$ad=bc$$

と書きかえることができます．これは $a:b=c:d$ で外側にある a と d の積（外項の積）と，内側にある b と c の積（内項の積）が一致するという有名な公式です．

比例関係の数式表現

$a : b = c : d$ の時，$ad = bc$ である．

$$\underbrace{a : \overbrace{b = c}^{\text{内項の積 } bc} : d}_{\text{外項の積 } ad}$$

比例式と分数の対応関係の操作ができると**具体的な関係から抽象的な関係を導けるようになります**．例えば，アルバイトを 8 時間やって 6400 円稼いだとします．この時 1 時間で稼げるバイト代（時給）はいくらか？1000 円稼ぐのに必要な時間は何分か？というような操作です．アルバイト 8 時間に対して 6400 円であれば時給が 800 円であることはすぐに分かります．この逆数を取れば，1 円稼ぐのに必要な時間は $\frac{1}{800}$時間 $=\frac{60}{800}$分 $=\frac{3}{40}$分 となります．よって，1000 円稼ぐのに必要な時間は $1000 \times \frac{3}{40}$分 $=\frac{3000}{40}$分 $=\frac{300}{4}$分 $=75$ 分 ということが分かります．これらの関係を比例式で表すと，

$$6400\text{ 円} : 8\text{ 時間} = 800\text{ 円} : 60\text{ 分} = 1000\text{ 円} : 75\text{ 分}$$

となります．

例題 B-4　以下の比例式について，x の値を計算しなさい．

1. $5 : 3 = x : 2$
2. $\frac{3}{2} : \frac{4}{5} = \frac{15}{4} : x$
3. $1.4 : 2.1 = x : \frac{1}{2}$

B.2 関係自体を考える関数

B.2.1 関数とは何か

分数と比例式がある数と他の数の相対的な関係を表現するということが分かったところで，この「関係」という概念をもう一歩進めて考えていきましょう．

2 : 1 という比例関係を表現する方法は，4 : 2 や 3 : 1.5 などさまざまな組み合わせがありました．この関係をもう少し一般的に表現すると,「変数 x と変数 y の相対的な関係が 1 と 2 の相対的な関係と等しい」と表記できます．これを比例式で表現すると次のようになります．

$$x : y = 1 : 2$$

これを分数または内項の積と外項の積の一致で表記し直すと，

$$y = 2x$$

となります.「変数 x と変数 y の相対的な関係が 1 と 2 の相対的な関係と等しい」という比例関係は,「変数 y は変数 x の 2 倍に等しい」という関係と同じことだということになります．変数 x の値が変われば変数 y の値も変わるので，$y = 2x$ は変数 x と変数 y の関係自体を捉える表現であることが分かります．このように，**ある変数と他の変数の間の関係を規定する数式を関数といいます．** $y = 2x$ は変数 y が x の 1 次式で表現できるので **1 次関数**といいます．他にも

$$y = 2x + 3$$

のように 1 次の項に定数項が加わったものも 1 次関数です．

比例関係以外の関係を表す関数もあります．

$$y = 2x^2 + 3x + 4$$

というように y が x の 2 次式で表現できる場合，**2 次関数**といいます．また，y を x^n と関係づける関数を**べき関数**といいます．

$$y = x^n$$

べき関数の中でも $n=\frac{1}{2}$ のケース，すなわちルート関数

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

と $n=-1$ のケース，すなわち逆関数

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

はよく使います.

関数

変数 y が変数 x に依存して決まる時，その対応関係を表現した式を関数という.

$$y = F(x),\quad \text{や}\; y = f(x)$$

と表記する.

F や f は function（関数）の頭文字 f です．**この F や f は変数ではないという点に注意してください．** また，f 以外の記号を使って関数を表現することもあります.（例えば，効用関数 $u(x)$.）

例題 B-5　以下の比例式を $y=$ の式に書き換えなさい.

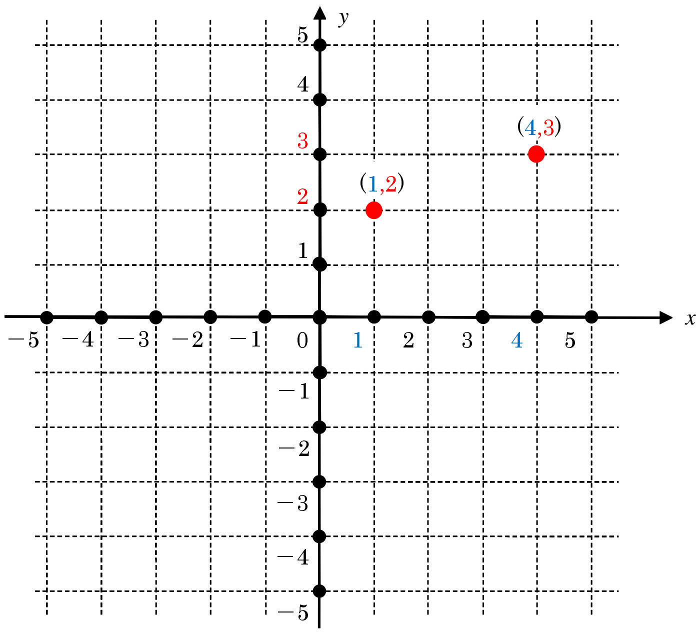
1. $x:y=5:7$
2. $x:y=\frac{1}{2}:9$
3. $x:y=\frac{3}{4}:\frac{3}{2}$

B.2.2　数直線と座標平面

$2x = 0$ というように変数が 1 つしかない式は，式があらわす条件を満たす数直線上の一点を表していました．$y = 2x$ というように変数が 2 つある式は，変数 x の値に応じて変数 y が決まるという対応関係を表すものになります．x と y の対応関係を表現する方法として，数直線ではなく座標平面というものを用います．

数直線を 2 本用意します．1 つの数直線は変数 x の取り得る値の全体で，もう 1 つの数直線は変数 y の取り得る値の全体です．これをそれぞれ 0 の地点で横方向と縦方向に直角に組み合わせます．そうすると，平面上に 2 本の線が走っている形になります（図 B.2）．今は横の線が変数 x を表すので x 軸，縦の線が変数 y を表すので y 軸と呼びます．ただ，横軸，縦軸といったり，x，y 以外の変数を使った場合はその変数の名前で軸の名前を呼ぶこともあります．

図 B.2: xy 平面



この 2 本の線の走っている平面全体を**座標平面**とか **xy 平面**といいます．数直線上の位置を「0 からの距離」と「0 から見て右（+）か左（−）か」で表現したように，座標平面は平

面上の 1 つ点をその点から x 軸方向に真下に下ろした点と，y 軸方向に真横に水平移動したときにぶつかる点の 2 つで表現します．例えば，図 B.2 には平面上に 2 つの点が打ってあります．$(1,2)$ という点は，x 軸上の 1 と y 軸上の 2 の組み合わせによって表現される位置です．$(4,3)$ という点は，x 軸上の 4 と y 軸上の 3 の組み合わせによって表現される位置です．

例題 B-6　図 B.2 上に以下の座標で表される点を打ちなさい．

1. $(x,y)=(2,1)$
2. $(x,y)=(3,2)$
3. $(x,y)=(-2,1)$

B.3　単調な関係を表す関数

B.3.1　1 次関数の性質

　関数はあるモノと他のモノの関係を表すのに用いられます．単純な比例関係を表現する関数は 1 次関数でした．1 次関数は変数 y を変数 x の 1 次式により表現します．一般的に 1 次関数とは変数 x と変数 y の関係を次のように分解して表現します．

$$y = ax + b$$

未知の定数（パラメータ）a は y のうち x の値に応じて決まる部分（x が 1 変化すると y は a 変化する）です．未知の定数（パラメータ）b は y のうち x の値とは無関係な部分です．ここで

- a を**係数**または**傾き**と呼び，
- b を**定数項**または y **切片**と呼びます．

1 次関数に限りませんが，関数は y が x に依存していることを明示するために

$$y(x) = ax + b \quad \text{または} \quad y = f(x) = ax + b$$

というように表記することもあるので覚えておいてください．**$y(x)$ は y が x に依存しているということを意味します．$y \times x$ の意味ではないので注意して下さい．**

1 次関数を描く

　単純な比例関係

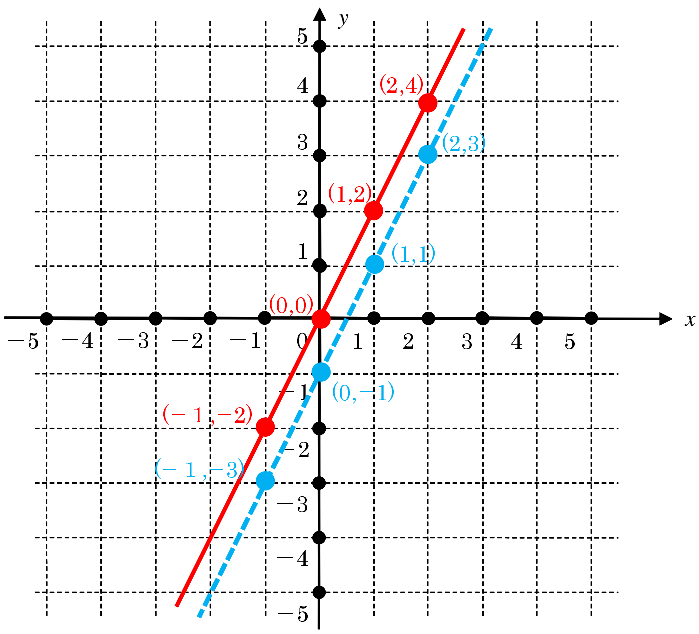
$$y = 2x$$

を考えましょう．これは $x = -1$ の時に $y = -2$，$x = 0$ の時に $y = 0$，$x = 1$ の時に $y = 2$，$x = 2$ の時に $y = 4$ となります．これを (x, y) 座標で表現すると $(-1, -2)$，$(0, 0)$，$(1, 2)$，$(2, 4)$ です．表にまとめるとつぎのようになります．

x	y
-1	-2
0	0
1	2
2	4

これを xy 平面で表現すると図 B.3 の実線のようになります．点が一直線に配置されていることが分かります．表では x を -1，0，1，2 と整数に限定して計算していますが，例えば $x = 0.5$ であれば $y = 1$ というように $y = 2x$ の関係はこの点の間にも存在しています．よって，1 次関数は点をつなげた直線であるということが分かります．このことから 1 次関数を**線形関数**と呼びます．

図 B.3: xy 平面



さきほどの比例関係に定数項を加えた以下の 1 次関数

$$y = 2x - 1$$

は $x=-1$ の時に $y=-3$，$x=0$ の時に $y=-1$，$x=1$ の時に $y=1$，$x=2$ の時に $y=3$ となります．これを (x,y) 座標で表現すると $(-1,-3)$，$(0,-1)$，$(1,1)$，$(2,3)$ です．

x	y
-1	-3
0	-1
1	1
2	3

これを xy 平面で表現すると図 B.3 の点線のようになります．$2x$ と $2x-1$ を比較すると $2x-1$ は $2x$ を下側 1 だけ平行移動したものだということが分かるでしょう．

例題 B-7　以下の 1 次関数を xy 平面に図示しなさい．

1. $y=\frac{1}{2}x+1$
2. $y=\frac{2}{3}x+2$
3. $y=-4x+3$

平面上の点から 1 次関数を導く

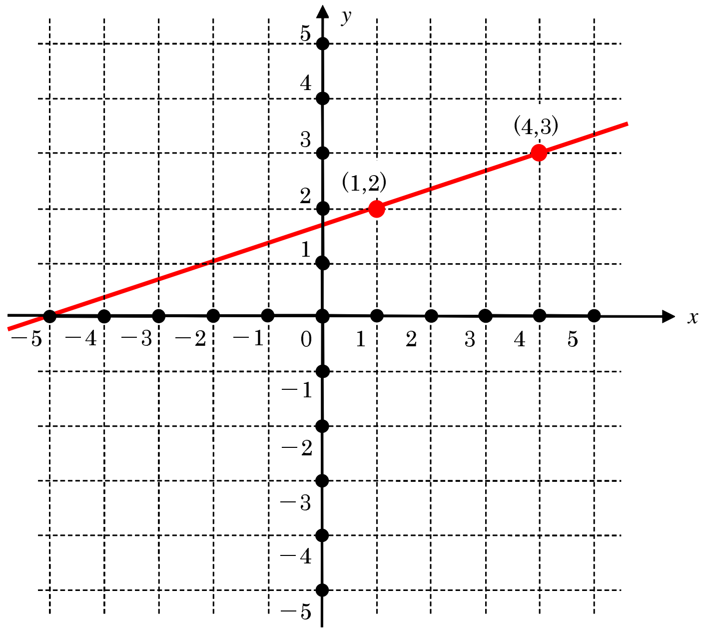
平面上に 2 つの点が与えられれば，その 2 つの点を通る直線を描くことができます．よって，その 2 点を通る 1 次関数も導くことができます．

1 次関数

$$y = ax + b$$

があり，図 B.4 のように (x, y) が $(1, 2)$ と $(4, 3)$ を通るとしましょう．

図 B.4: xy 平面



これは x が 1 から 4 へ移動したときに y は 2 から 3 に移動しています．とすると，x の係数（傾き）は

$$\frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$$

です．1 次関数は $y = \frac{1}{3}x + b$ という形になっているわけです．さらに，$(1, 2)$ であることか

ら，$2 = \frac{1}{3} \times 1 + b$ となっていなければいけません．よって，

$$\begin{aligned} b &= 2 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

となるはずです．または，$(4, 3)$ より $3 = \frac{1}{3} \times 4 + b$ となっていなければならないので，

$$\begin{aligned} b &= 3 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

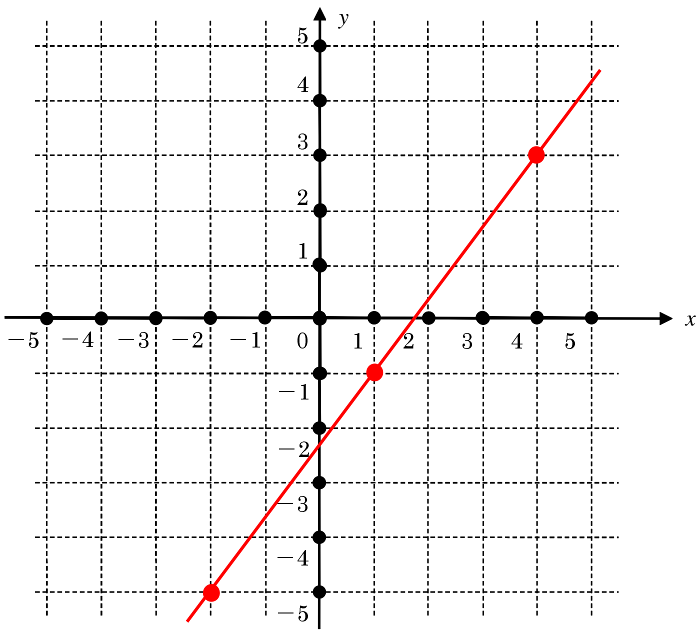
です．したがって，1 次関数は

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

ということになります．

これは，点が与えられなくても直線が与えられていて，その直線が通る点が 2 つだけわかれば，1 次関数の係数と定数項を計算することができることを意味しています．例えば，図 B.5 のようなグラフがあったとします．このグラフは点が与えられているわけではありませんが，直線が (x, y) として $(-2, -5)$，$(1, -1)$，$(4, 3)$ を通ることが分かります．ということは，この 3 つのどれか 2 つを利用して 1 次関数の係数と定数項を計算することができます．この計算が連立方程式を解くという話につながります．

図 B.5: xy 平面



例題 B-8　図 B.5 の直線がどのような 1 次関数で表現できるか計算しなさい．

B.3.2　関係と関係の関係〜連立方程式

関数とは，ある変数 x と他の変数 y との間の関係を規定するものであり，その関係を満たすようなさまざまな x と y の組み合わせを示すものでした．では，ある変数 x と他の変数 y との間の関係が複数あったらどうなるでしょうか．例えば，平面上で直線が 2 本あったとします．直線はそれぞれが x と y の間の関係を規定するものですが，2 本の直線が交わる点では，2 本の直線が表す関係を同時に満たすことになります．つまり，複数の関係を同時に満たす点ということです．

2 本の関数により x と y の関係が規定されており，求めようとする x と y の満たすべき条件が等式で表されている時，その 2 本の式を**連立方程式**と呼びます．そして，**この 2 本の関数が表す関係を満たす x と y を求めることを連立方程式を解くといいます．**

連立方程式の解き方

一般的に連立方程式の解き方には**加減法**と**代入法**があります．

加減法　次の連立方程式があるとします．

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & \text{(B.1)} \\ 4x - y = 10 & \text{(B.2)} \end{cases}$$

(B.1) 式はそのままで，(B.2) 式に 2 を掛けます．

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & \text{(B.3)} \\ 8x - 2y = 20 & \text{(B.4)} \end{cases}$$

(B.3) 式から (B.4) 式を引くと以下の式を得ます．

$$-5x = -15$$

したがって，$x = 3$ を得ます．この値を (B.1) 式に代入すると $3 \times 3 - 2y = 5$ で，これを展開すると $2y = 4$ なので，$y = 2$ を得ます．

代入法　次の連立方程式があるとします．

$$\begin{cases} x + y = 5 & \text{(B.5)} \\ y = 3x + 1 & \text{(B.6)} \end{cases}$$

(B.6) 式を (B.5) 式に代入すると

$$\begin{aligned} & x + (3x + 1) = 5 \\ \Leftrightarrow \quad & x + 3x = 5 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 4x = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 1 \end{aligned}$$

これを (B.6) 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
y &= 3 \times 1 + 1 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

となります．

例題 B-9　代入法を用いて以下の問いに答えなさい．

1. 1 次関数 $y = ax + b$ において (x, y) が $(1, 4)$，$(4, 1)$ を通るとする．この時の係数 a と定数項 b を求めなさい．

2. 1 次関数 $y = ax + b$ において (x, y) が $(-2, 1)$，$(1, 2)$ を通るとする．この時の係数 a と定数項 b を求めなさい．

3. 1 次関数 $y = ax + b$ において (x, y) が $(-3, 0)$，$(-2, -2)$ を通るとする．この時の係数 a と定数項 b を求めなさい．

連立方程式の具体例

連立方程式は以下のような問題を扱う際に用います．財布の中に 3500 円入っているとします．今日友人達がやってくるので，このお金を使い切ってビール（1 本 300 円）と鶏の唐揚げ（1 個 100 円）を買うとします．ビールの購入量を x 本とするとビールの購入代金は $300x$，鶏の唐揚げの購入量を y 個とすると鶏の唐揚げの購入代金は $100y$ となります．ビールの購入代金と鶏の唐揚げの購入代金の合計を 3500 円にしなければいけません．これを数学的に表現すると

$$3500 = 300x + 100y$$

となり，これを書きかえると，

$$y = 35 - 3x$$

と書けます[1]．これは，3500 円という予算の制約のもとで，ビール（x）を 1 本も買わなければ鶏の唐揚げは 35 個買うことができ，ビールの購入本数（x）を 1 本増やすごとに鶏の唐揚げ（y）が 3 個買えなくなるということを意味しています．これは**予算制約式**と呼ばれる経済学でよく用いられる 1 次関数の例です．

次に「ビール 2 本につき，鶏の唐揚げを 1 個購入する」という買物ルールがあるとしましょう．今，ビールの購入本数は x，鶏の唐揚げの購入個数は y です.「ビール（x）2 本につき，鶏の唐揚げ（y）を 1 個購入する」というのは次の比例関係が成立することを意味します.

$$x : y = 2 : 1$$

したがって，x と y の間には以下の式が成立します.

$$y = \frac{1}{2}x$$

ここまでの話を整理しましょう．ビールの購入本数（x）と鶏の唐揚げの購入個数（y）の間には次の関係がありました.

- ビールの購入代金と鶏の唐揚げの購入代金の合計を 3500 円にしなければいけない.
- ビール 2 本につき，鶏の唐揚げを 1 個購入する.

この 2 つの関係は次の 2 本の式で表現できました.

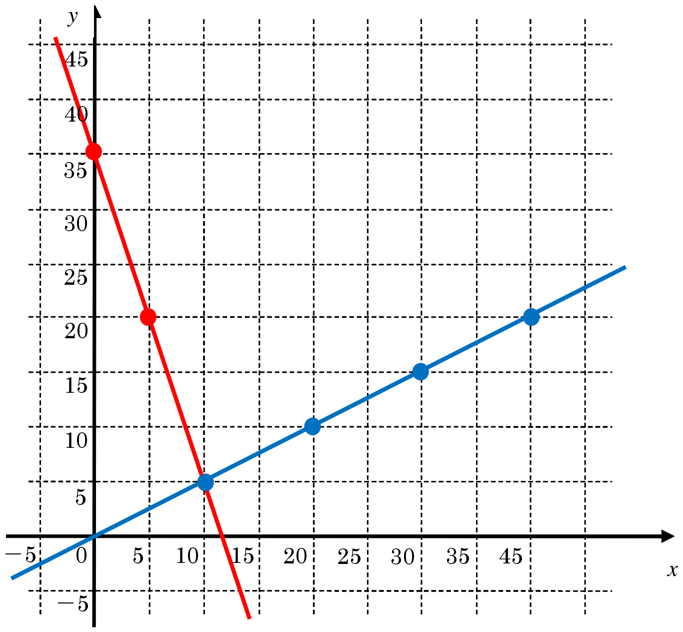
$$\begin{cases} y = 35 - 3x \\ y = \dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

このような x と y の間に 2 通りの関係がある時，その 2 つを同時に満たすような x と y とは，どのようなものでしょうか．今，それぞれの関数を xy 平面に描くと図 B.6 のようになります．右下がりの線が予算制約式で，右上がりの線がビールを 2 本につき唐揚げを 1 個買うという買い物ルールです．それぞれ x の変化に対して異なった y の値を示しますが，直線が交わっているところでは，x の値，y がそれぞれ同じ値を取ります．この交点では，

[1]本来は $\geqq$ 記号を使い不等式にしなければいけませんが，ここでは等式とします．3500 円の予算すべてを使い切ると想定しているからです.

$y = 35 - 3x$ と $y = \frac{1}{2}x$ 両方の関係が同時に成立しています．このような交点の x，y を求めることを連立方程式を解くといいます．

図 B.6: 連立方程式の例



上の連立方程式であれば，$35-3x$ で決まる y と $\frac{1}{2}x$ で決まる y が同じ値を取ればよいので，

$$35 - 3x = \frac{1}{2}x$$

となるような x を探せばよいことになります．これは

$$\begin{aligned} & 3x + \frac{1}{2}x = 35 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{6+1}{2}x = 35 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{7}{2}x = 35 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 10 \end{aligned}$$

$y = \frac{1}{2}x$ なので，$y = 5$ となります．したがって，ビール 10 本で 3000 円支払い，鶏の唐揚げ

を 5 個買い 500 円を支払うことにすれば，予算 3500 円の範囲に収まり，なおかつビールと唐揚げの購入個数の比率を 2 : 1 にすることができます．

例題 B-10　次の連立方程式を解きなさい．また，図の xy 平面上にそれぞれの式を図示して，連立方程式の解が 2 本の直線の交点となっていることを確認しなさい．

1.

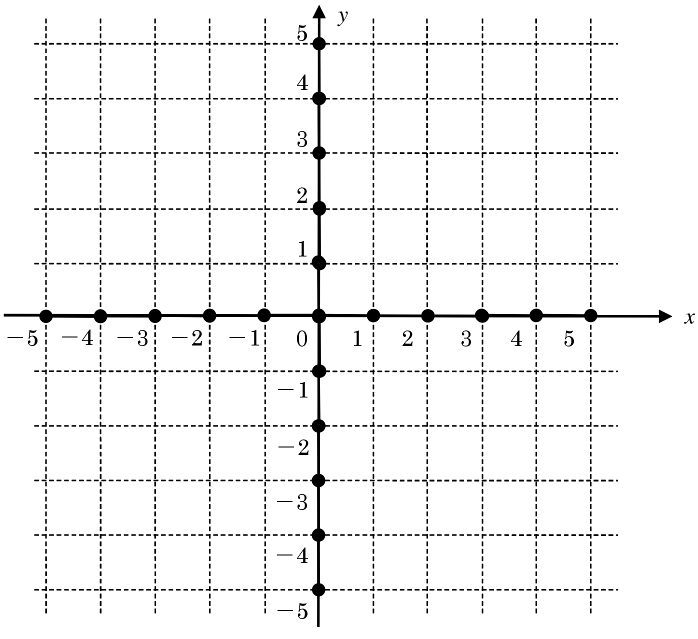
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2 = 2y \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x - 4y = -8 \\ -6x - 8 = 4y \end{cases}$$



B.3.3　未知の定数（パラメータ）を含んだ 1 次関数

これまでは係数や定数項が具体的な数値のケースを考えてきました．しかし，係数や定数項が未知の定数（パラメータ）となるケースにも慣れてください．例えば，変数 y と変数 x の間に以下の関係があったとします．

$$y = ax + bx - 100x + 120 - c$$

ここで a，b，c は未知の定数（パラメータ）とします．この関数は x に関する 1 次関数であるため以下のように表現できます．

$$y = (a + b - 100)x + 120 - c$$

このように表現すると，係数は $a+b-100$，定数項は $120-c$ であることが明確になります．

未知の定数を含んだ連立方程式も重要です．

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

という連立方程式があるとします．この連立方程式を解くには上のと下の式が同じ y になっていることから

$$\begin{aligned} & ax + b = cx + d \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{d-b}{a-c} \end{aligned}$$

となります．これをもとの式（例えば上の式）に代入すると，

$$\begin{aligned} y &= a\frac{d-b}{a-c} + b \\ &= \frac{a(d-b) + b(a-c)}{a-c} \\ &= \frac{ad-bc}{a-c} \end{aligned}$$

となります．

例題 B-11　以下の問いに答えなさい．

1. 以下の変数 y を変数 x の 1 次関数として表現しなさい．ただし小文字の記号は未知の定数であるとする．そして，係数と定数項がどのように表現されるかを示しなさい．

   (a) $y = 4ax - 12x + b^2x + a^2 + 16a$

   (b) $a^2y = 10y + 100ax - b^2x - 60ax + a^2 + 10b - 9b + by$

2. 以下の連立方程式を y と x について解きなさい．(x と y を小文字の記号（未知の定数（パラメータ））と数字により表現しなさい．)

$$\begin{cases} y = (10 - a)x + 2b + 5 \\ y = (3 - a)x + 4 \end{cases}$$

B.4　非単調な関係を表す関数

B.4.1　2 次関数の性質

2 次関数の表現

2 次関数は 2 次式の形で表現される関数です．例えば，

$$y = ax^2 + bx + c$$

というようなものです．この形を 2 次関数の**一般形**といいましょう．ただし，これ以外の表現方法もあります．

2 次関数の表現

2 次関数には以下の 3 種類の表現方法があります．

$$\begin{array}{rl} \text{一般形} & y = ax^2 + bx + c \\ \text{標準形} & y = a(x-d)^2 + e \\ \text{因数分解形} & y = a(x-f)(x-g) \end{array}$$

標準形を展開すると以下の形になります．

$$\begin{aligned} y &= a(x-d)^2 + e = a(x^2 - 2dx + d^2) + e \\ &= ax^2 - 2adx + ad^2 + e \end{aligned}$$

したがって，

$$b = -2ad,\ c = ad^2 + e$$

であれば，**一般形**と**標準形**は同じものになります．また，**因数分解形**を展開すると以下の形になります．

$$\begin{aligned} y &= a(x-f)(x-g) = a(x^2 - gx - fx + fg) \\ &= ax^2 - a(f+g)x + afg \end{aligned}$$

したがって，

$$b = -a(f+g), \quad c = afg$$

であれば**一般形**と**因数分解形**は同じものになります．

2 次関数の形状

2 次の項（ax^2）はどのような動きをするのかを確認しておきましょう．単純に

$$y = x^2$$
$$y = -x^2$$

という関数を考えます ($a = 1$ と $a = -1$ の場合)．x を -3 から 6 まで変化させると y の値は表 B.1 のようになります．これを xy 平面上に描いたものが図 B.7 の実線です．$y = x^2$ は 0 を中心に下を向いた U 字型をしています．$y = -x^2$ は 0 を中心に上を向いた逆 U 字型をしています．下を向いた U 字型を**下に凸**，上を向いた逆 U 字型を**上に凸**と呼びます．

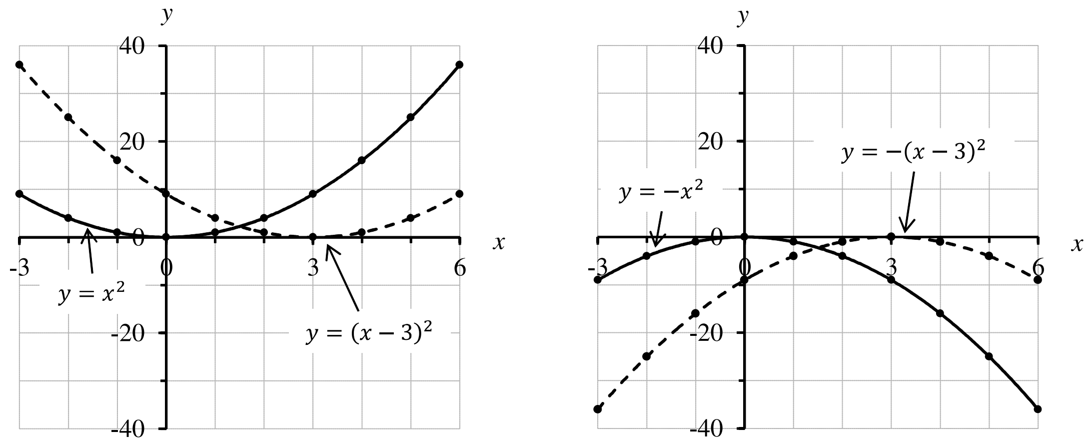
表 B.1: 2 次関数の性質

x	$y = x^2$	$y = -x^2$	$y = (x-3)^2$	$y = -(x-3)^2$
-3	9	-9	36	-36
-2	4	-4	25	-25
-1	1	-1	16	-16
0	0	0	9	-9
1	1	-1	4	-4
2	4	-4	1	-1
3	9	-9	0	0
4	16	-16	1	-1
5	25	-25	4	-4
6	36	-36	9	-9

次に

$$y = (x-3)^2$$
$$y = -(x-3)^2$$

図 B.7: 2 次関数の性質



という関数を考えてみましょう．これも x を -3 から 6 まで動かした時の y の値を表 B.1 に示し，これを xy 平面上に描くと図 B.7 の点線になります．$y = (x-3)^2$ も $y = -(x-3)^2$ も，$x = 3$ を中心としてそれぞれ下に凸，上に凸な左右対称な形となっています．また，上の式は次のように標準形から一般形へ展開することができます．

$$y = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$y = -(x-3)^2 = -x^2 + 6x - 9$$

このように，2 次関数は一般形であれ標準形であれ因数分解形であれ，左右対称な形になっていることが分かります．

2 次関数の形状

- 2 次関数は 2 次項 x^2 の係数が正である場合は**下に凸**，係数が負である場合は**上に凸**の形をしているという．
- 2 次関数は左右対称な形をしている．

2 次関数は **2** 次項の係数が正であれば下に凸なので最小値を持ちます．負であれば上に凸

なので最大値を持ちます．2 次関数の最大値または最小値の座標を求める操作は非常に重要です．

もう一度，図 B.7 を見ましょう．下に凸である（x^2 の係数が正になる）$y = x^2$ は $x = 0$ で y が最小値を取り左右対称な形です．$y = (x-3)^2$ は $x = 3$ で y が最小値を取り左右対称な形です．上に凸である（x^2 の係数が負になる）$y = -x^2$ は $x = 0$ で y が最大値を取り左右対称な形です，$y = -(x-3)^2$ は $x = 3$ で y が最大値を取り左右対称な形です．どのような 2 次関数でも $y = a(x-d)^2 + e$ という標準形で表した時の d が y の最大値または最小値を与える x 座標の値であり，e が y の最大値または最小値になります．

2 次関数が一般形 $y = ax^2 + bx + c$ で与えられていたとします．この時，この一般形の式を標準形 $y = a(x-d)^2 + e$ の式に直せば，簡単に 2 次関数の頂点座標が求められます．さきほど，

$$b = -2ad,\ c = ad^2 + e$$

という関係があれば，一般形と標準形は同じものになると説明しました．このうち，

$$b = -2ad \quad \Leftrightarrow \quad d = -\frac{b}{2a}$$

となるので，

$$x = d = -\frac{b}{2a}$$

の時に 2 次関数は最大値または最小値を持ちます．その時の y の値は

$$y = e = -ad^2 + c = -a\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 + c$$

ということになります．

ちなみに，ここでの説明は 2 次方程式の解の公式からも確認することができます．2 次方程式の解の公式を思い出しましょう．

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2 次関数の解は $x = -\frac{b}{2a}$ を中心にして $\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ であることが分かります．さらに，2 次関

数は左右対称な形であるので，頂点は $x = -\frac{b}{2a}$ となります．ということで，以下の公式が得られました．

2 次関数の頂点を与える x

2 次関数

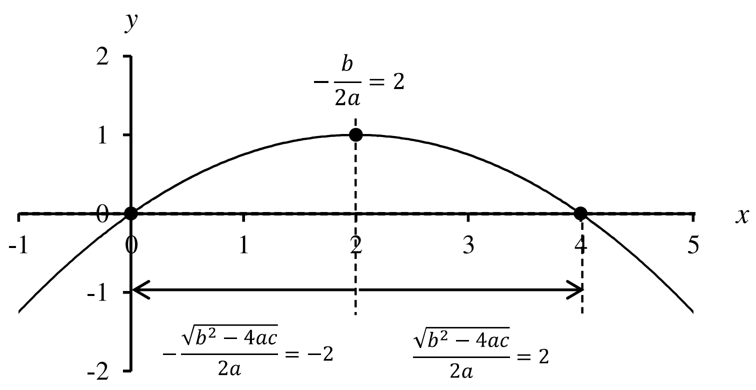
$$y = ax^2 + bx + c$$

に頂点を与えるような x は

$$x = -\frac{b}{2a}$$

具体例として，$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ を考えてみましょう．$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ と $y = 0$ との交点は，$-\frac{1}{4}x^2 + x = 0$ の解として求めることができます．この解は $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ より，$x = 2 \pm 2$，すなわち $x = 0$ と $x = 4$ となります．図 B.8 から分かるように，この 2 次関数の頂点の x 座標は x 軸（$y = 0$）との交点 $x = 0$ と $x = 4$ の真ん中である $x = 2$ です．この値は，公式より $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)} = 2$ として求めることができます．

図 B.8: 解の公式と 2 次関数の頂点座標との関係



例題 B-12　以下の 2 次関数の頂点座標を求めなさい．ただし，a は未知の定数（パラメータ）とする．

1. $y = -4x^2 + 3x + 1$
2. $y = -3x^2 + 6x + 1$
3. $y = -0.5x^2 + (10 - a)x + 3$

2 次関数の使用例〜ハンバーガーと満足度

経済学が対象とするあるモノと他のモノが常に単調な関係にあるわけではありません．例えば，みなさんは何か好きなものに対して「飽きてきた」と感じたことはないでしょうか．「お腹が空いている時にハンバーガーを買って食べたら最初は美味しかったけど，食べているうちにだんだん飽きてきた」という経験です．ハンバーガーを食べるという行為とそこから得られる満足度は単調な関係ではないようです．経済学では，飽きるという感覚以外にも，このような非単調な関係を扱うことが非常に多いです．このような非単調な関係を表現する代表的な関数として 2 次関数があります．

2 次関数が飽きるという感覚を表現できるということをみるために，ハンバーガーを食べた個数を x とし，そこから得られる満足度を y とし，以下のような関係があるとしましょう．

$$y = -x^2 + 6x$$

x と y の関係を計算してみると以下の表 B.2 のようになります．

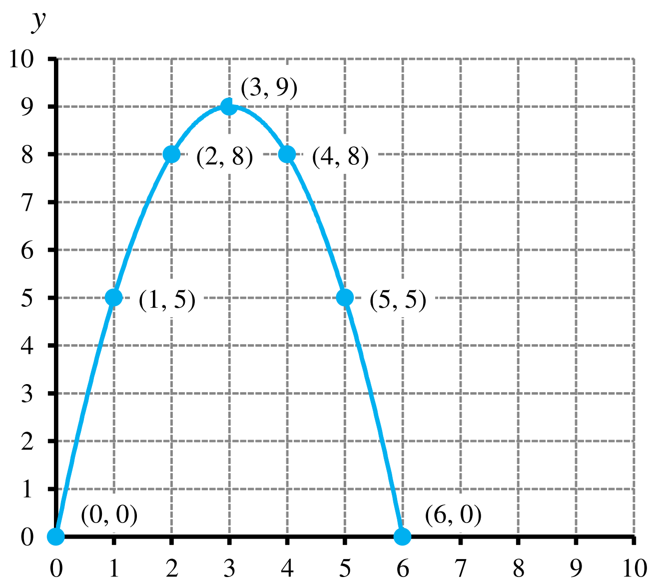
これを図示すると，図 B.9 のようになります．$x = 0$ と $x = 6$ で $y = 0$ となっていますが，これは $y = -x(x - 6)$ と変形できることから明らかです．また，0 と 6 の真ん中の $x = 3$ で最も高い値（頂点）になっていることが分かります．

x がハンバーガーの食べる数量で，y がハンバーガー x 個食べることから得られる満足度として解釈してみましょう．ハンバーガーを 1 個も食べない時の満足度は 0 です．そこで，ハンバーガーを 1 個食べると満足度は 5 まで上昇します．2 個目のハンバーガーを食べると満足度は 5 から 8 まで 3 上昇します．さらに，3 個目のハンバーガーを食べると満足度は 8 から 9 まで 1 上昇します．さらに，4 個目のハンバーガーを食べると満足度は 9 から 8 へと

表 B.2: y と x との関係

x	$y = -x^2 + 6x$
0	0
1	5
2	8
3	9
4	8
5	5
6	0

図 B.9: $y = -x^2 + 6x$ の図



1 下がってしまいます．ということは，ハンバーガーを 3 個目まで食べるのは満足度が上昇するけど，4 個目以降は満足度が低下してしまう．すなわち，4 個目以降は飽きてしまうということに対応します．

このように，2 次関数は何かを追加的に変化させていった時，その結果が非単調に変化していく状況を記述することができます．例えば，1 個目から 2 個目までハンバーガーを増やした時の満足度の変化は +3 で，2 個目から 3 個目までハンバーガーを増やした時の満足度の変化は +1 でした．すなわち，食べる量を増やせば増やすほど，1 個増やした時の満足度の増加幅が減っていくような状況を表現しています．

経済学では，何かを食べたり利用したりすることを**消費**といい，そこから得られる満足度を**効用**といいます．そして，両者を関係づける関数を**効用関数**と呼びます．

例題 B-13　以下の 2 次関数のグラフを図 B.9 に書きこみなさい．

1. $y = -0.5x^2 + 3x$
2. $y = -1.5x^2 + 6x$
3. $y = -0.2x^2 + 2x$

B.4.2　ルート（平方根）関数の性質

最後に，2 次関数と並んで利用することが多いルート関数

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

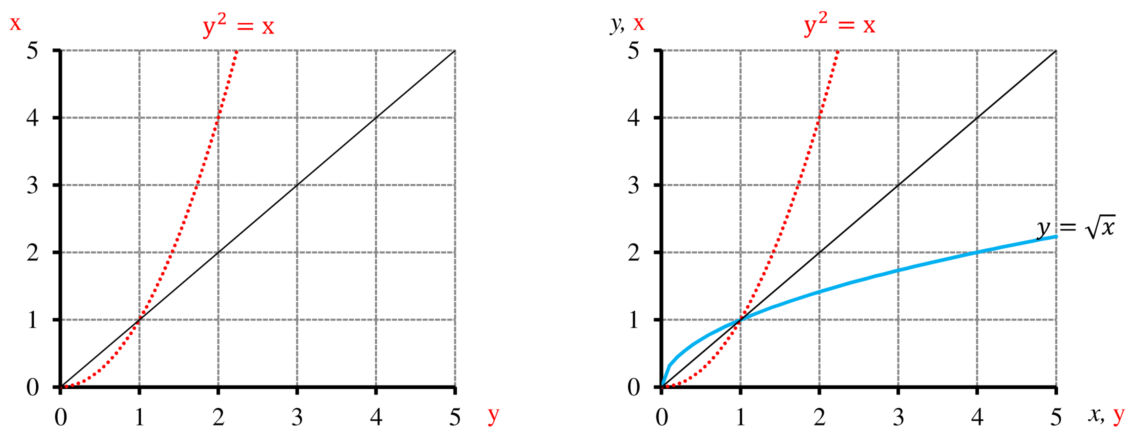
を紹介しましょう．この関数は**べき関数** x^n の一種です．ここでは，このテキストで利用する範囲（「どのような形をしているのか」と「2 次関数とどういう関係があるのか」）に絞って説明します．

ルートは簡単に計算できるもの（例えば $x = 1$ や $x = 4$）と，計算できないもの（例えば $x = 2$ や $x = 3$）があります．ここでは，計算できるものだけ並べてみましょう．また，比較するために $y^2 = \sqrt{x}^2 = x$ も並べます．

表 B.3: y と x，y と x との関係

x	$y = \sqrt{x}$	y	$\mathrm{y}^2 = \mathrm{x}$
0	0	0	0
1	1	1	1
4	2	2	4
9	3	3	9
16	4	4	16
25	5	5	25
36	6	6	36

図 B.10: $\mathrm{y}^2 = \mathrm{x}$ と $y = \sqrt{x}$ の図



横軸を x，縦軸を y として $y = \sqrt{x}$ を描くと図 B.10 の右図の実線になります．ここで，$y = \sqrt{x}$ の両辺を 2 乗すると，$y^2 = x$ となります．$y^2 = x$ を $\mathrm{y}^2 = \mathrm{x}$ と書き直し，横軸を y，縦軸を x として図に描くと左図の点線となります．この点線 $\mathrm{y}^2 = \mathrm{x}$ を右図に重ね合わせると，実線 $y = \sqrt{x}$ を右斜め 45 度の線（$y = x$ の線）を軸にして x 軸と y 軸をひっくり返したような形状となります．

ルート関数は消費と効用の関係を表現する効用関数，お金や人手，各種機械の量（経済学では「生産要素」といいます）と，それを使って生み出すことのできる生産物の量の関係を表現する生産関数などさまざまなところで用います．

付 録 A　数と式（例題の解答・解説）

A.3　式の基本ルール

例題 **A-1**

1. $10 \times 3 - 5 \times 2^3 - 4 \div (5 - 1)$

   $= 10 \times 3 - 5 \times 2^3 - 4 \div 4$

   $= 10 \times 3 - 5 \times 8 - 4 \div 4$

   $= 30 - 40 - 1 = -11$

2. $9 - 3 \div 3^0 + 2 \times (4 - 4)$

   $= 9 - 3 \div 3^0 + 2 \times 0$

   $= 9 - 3 \div 1 + 2 \times 0$

   $= 9 - 3 + 0 = 6$

3. $\{3 \times (2^2 + 3^3) + 1 \times (3^1 + 4^2)\} \times 2^2$

   $= \{3 \times (4 + 27) + 1 \times (3 + 16)\} \times 2^2$

   $= \{3 \times (4 + 27) + 1 \times (3 + 16)\} \times 4$

   $= (3 \times 31 + 1 \times 19) \times 4$

   $= (93 + 19) \times 4 = 112 \times 4 = 448$

例題 **A-2**

1. $2a \times \frac{1}{2a} = 1$

2. $2a \div 4a = 2a \times \frac{1}{4a} = 2a \times \frac{1}{2a} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3. $(2a + a) \div (4a - a)$

   $= \frac{3a}{3a} = 1$

例題 A-3

1. $x(5-2y^2) = 5x - 2xy^2$

2. $(2x+4y)^2 = (2x+4y) \times (2x+4y) = (2x+4y) \times 2x + (2x+4y) \times 4y$

   $= 4x^2 + 8yx + 8xy + 16y^2 = 4x^2 + 16xy + 16y^2$

3. $(3x+2y)(4x-y) = (3x+2y)4x - (3x+2y)y$

   $= 12x^2 + 8yx - 3xy - 2y^2 = 12x^2 + 5xy - 2y^2$

例題 A-4

1. $10^2 \times 10^1 = (10 \times 10) \times 10 = 10^3 = 1000$

2. $(4^3)^2 = (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4^6 = 4096$

3. $5^2 \times 5^{-2} = (5 \times 5) \times \frac{1}{5 \times 5} = 1$

4. $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$

   補足：$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ であるから，$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$

A.4　方程式の基本ルール

例題 A-5

1. $4+5x=-2x-5$

   $\Leftrightarrow\ (4+5x)-4=(-2x-5)-4$

   $\Leftrightarrow\ 5x=-2x-9$

   $\Leftrightarrow\ 5x+2x=(-2x-9)+2x$

   $\Leftrightarrow\ 7x=-9$

   $\Leftrightarrow\ x=-\frac{9}{7}$

2. $3+5x=9+3x$

   $\Leftrightarrow\ (3+5x)-3=(9+3x)-3$

   $\Leftrightarrow\ 5x=6+3x$

   $\Leftrightarrow\ 5x-3x=(6+3x)-3x$

   $\Leftrightarrow\ 2x=6$

   $\Leftrightarrow\ x=3$

3. $2+7x=-10-4x$

   $\Leftrightarrow\ (2+7x)-2=(-10-4x)-2$

   $\Leftrightarrow\ 7x=-12-4x$

   $\Leftrightarrow\ 7x+4x=(-12-4x)+4x$

   $\Leftrightarrow\ 11x=-12$

   $\Leftrightarrow\ x=-\frac{12}{11}$

例題 A-6

1. $x^2=100$

   $\Leftrightarrow\ x=\pm 10$

2. $x^2=20$

   $\Leftrightarrow\ x=\pm\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$

3. $x^2 = 5$

   $\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{5}$

例題 A-7

1. $5x^2 + x - 4 = (5x - 4)(x + 1)$

2. $2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2)$

3. $10x^2 + 7x - 6 = (5x + 6)(2x - 1)$

例題 A-8

1. $5x^2 + x - 4 = 0$

   $\Leftrightarrow \quad (5x - 4)(x + 1) = 0$

   $x = \frac{4}{5}, -1$

2. $2x^2 + 5x + 2 = 0$

   $\Leftrightarrow \quad (2x + 1)(x + 2) = 0$

   $x = -\frac{1}{2}, -2$

3. $10x^2 + 6x - 5 = 0$ 因数分解ができないので，解の公式を使う．

   $x = -\frac{6}{2\times10} \pm \frac{\sqrt{6^2-4\times10\times(-5)}}{2\times10}$

   $\Leftrightarrow \quad x = -\frac{6}{20} \pm \frac{\sqrt{36+200}}{20}$

   $\Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{10} \pm \frac{2\sqrt{59}}{20} = -\frac{3}{10} \pm \frac{\sqrt{59}}{10}$

   別解：平方完成を使った場合

   $10x^2 + 6x - 5 = 0$ の両辺を 10 で割ると，$x^2 + \frac{6}{10}x - \frac{5}{10} = x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{2} = 0$

   $\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{100} - \frac{1}{2} = 0$

   $\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100} + \frac{50}{100}$

   $\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{59}{100}$

   $\Leftrightarrow \quad x + \frac{3}{10} = \pm\sqrt{\frac{59}{100}} = \pm\frac{\sqrt{59}}{10}$

   $\Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{10} \pm \frac{\sqrt{59}}{10}$

4. $10x^2+6ax-5b=0$ 因数分解ができないので，解の公式を使う．

$x=-\frac{6a}{2\times10}\pm\frac{\sqrt{(6a)^2-4\times10\times(-5b)}}{2\times10}$

$\Leftrightarrow\ \ x=-\frac{3a}{10}\pm\frac{\sqrt{36a^2+200b}}{20}$

$\Leftrightarrow\ \ x=-\frac{3a}{10}\pm\frac{\sqrt{4(9a^2+50b)}}{20}$

$\Leftrightarrow\ \ x=-\frac{3a}{10}\pm\frac{2\sqrt{(9a^2+50b)}}{20}$

$\Leftrightarrow\ \ x=-\frac{3a}{10}\pm\frac{\sqrt{9a^2+50b}}{10}$

別解：平方完成を使った場合

$10x^2+6ax-5b=0$ の両辺を 10 で割ると，$x^2+\frac{6a}{10}x-\frac{5b}{10}=x^2+\frac{3a}{5}x-\frac{b}{2}=0$

$\Leftrightarrow\ \ \left(x+\frac{3a}{10}\right)^2-\frac{9a}{100}-\frac{b}{2}=0$

$\Leftrightarrow\ \ \left(x+\frac{3a}{10}\right)^2=\frac{9a}{100}+\frac{50b}{100}$

$\Leftrightarrow\ \ x+\frac{3a}{10}=\pm\sqrt{\frac{9a}{100}+\frac{50b}{100}}=\pm\frac{\sqrt{9a+50b}}{10}$

$\Leftrightarrow\ \ x=-\frac{3a}{10}\pm\frac{\sqrt{9a+50b}}{10}$

付 録B　数と数の関係（例題の解答・解説）

B.1　分数と比例関係

例題 B-1

1. 1 時間は 60 分，1 分は 60 秒だから，1 時間は 3600 秒．よって，4500 秒を 3600 で割ると 1.25 時間.

2. 1 ダースは 12 本だから，48 を 12 で割ると 4.

3. 1 ドルが 100 円ということは 1 円が 0.01 ドル．一方，1 ユーロが 160 円ということは 1 円が 0.00625 ユーロ．0.01 ドルと 0.00625 ユーロが等しいので，1 ドルは 0.625 ユーロ.

例題 B-2

1. 変化率の式で表すと，$\frac{y-500000}{500000} = 0.001$ なので，y について解けばよい．$y - 500000 = 500$ より，$y = 500500$．よって，500500 円.

2. 変化率の式で表すと，$\frac{105-100}{100} = z$ なので，z について解けばよい．$(105 - 100) = 100z$ より，$z = 0.05$．よって 5%.

3. 変化率の式で表すと，$\frac{90-x}{x} = 0.125$ なので，x について解けばよい．$\frac{90}{x} - 1 = 0.125$ だから，$1.125x = 90$ より，$x = 80$．よって，1 年前の体重は 80kg.

例題 B-3

1. $\frac{5}{\frac{2}{3}} = \frac{15}{2}$

2. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

3. $\frac{2}{5} \div \frac{2}{10} = \frac{2}{5} \times \frac{10}{2} = 2$

4. $\frac{250}{125} \times \frac{20}{15} \div \frac{88}{33} = 2 \times \frac{4}{3} \div \frac{8}{3} = 2 \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{8} = 1$

5. $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$

例題 B-4

1. 内項の積=外項の積なので，$3x = 5 \times 2$ である．これは $3x = 10$ なので，$x = \frac{10}{3}$.

2. 内項の積=外項の積なので，$\frac{4}{5} \times \frac{15}{4} = \frac{3}{2} \times x$ である．これは，$3 = \frac{3}{2}x$ なので，$x = 2$

3. 内項の積=外項の積なので，$2.1x = 1.4 \times 0.5 = 0.7$．よって，$x = \frac{1}{3}$

B.2　関係自体を考える関数

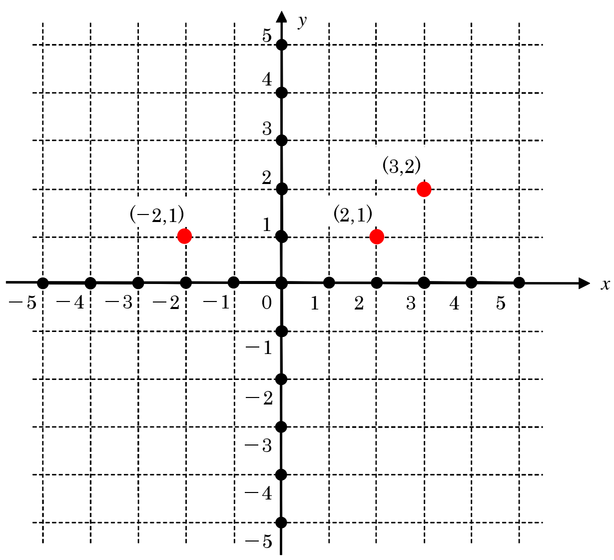
例題 B-5

1. 内項の積=外項の積なので，$5y = 7x$ である．よって，$y = \frac{7}{5}x$.

2. 内項の積=外項の積なので，$\frac{1}{2}y = 9x$．よって，$y = 18x$.

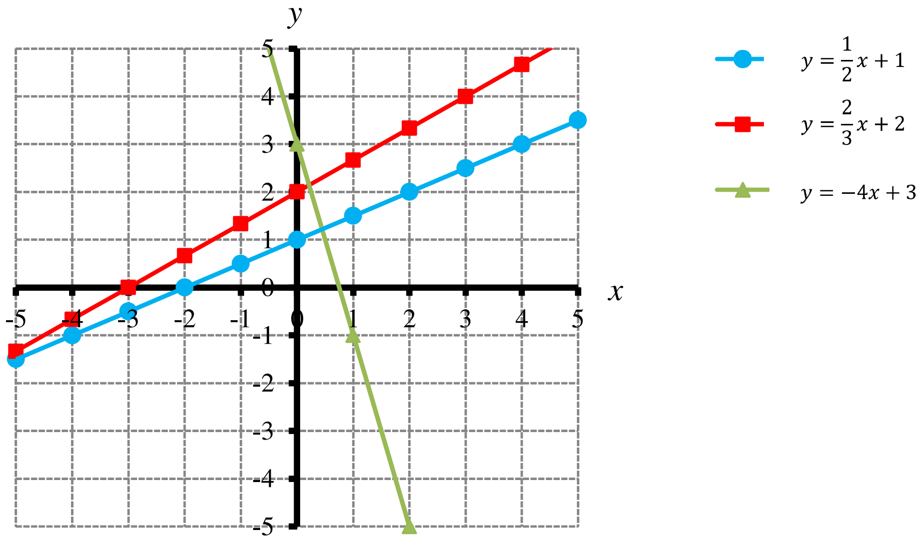
3. 内項の積=外項の積なので，$\frac{3}{4}y = \frac{3}{2}x$．よって，$y = \frac{3}{2}x \div \frac{3}{4} = \frac{3}{2}x \times \frac{4}{3} = 2x$.

例題 B-6



B.3　単調な関係を表す関数

例題 B-7



例題 B-8

3 つの座標のうち，$(1, -1)$ と $(4, 3)$ の組み合わせをそれぞれ $y = ax + b$ に代入すると，

$$-1 = a + b \tag{B.1}$$

$$3 = 4a + b \tag{B.2}$$

となる．(B.1) 式は $b = -1 - a$ と書きかえることができるので，これを (B.2) 式の b に代入してやると，$3 = 4a + (-1 - a) = 3a - 1$．よって，$a = \frac{4}{3}$，$b = -\frac{7}{3}$.

例題 B-9

1. $(1, 4)$ と $(4, 1)$ の組み合わせをそれぞれ $y = ax + b$ に代入すると，

$$4 = a + b \tag{B.3}$$

$$1 = 4a + b \tag{B.4}$$

となる．未知の数が 2 つの場合は，方程式が 2 本あれば a と b を求めることができる．(B.3) 式は $b = 4 - a$ と書きかえることができるので，これを (B.4) 式の b に代入してやると，$1 = 4a + (4 - a) = 3a + 4$．よって，$a = -1$，$b = 5$.

2. $(-2,1)$ と $(1,2)$ の組み合わせをそれぞれ $y=ax+b$ に代入すると，

$$1=-2a+b \tag{B.5}$$

$$2=a+b \tag{B.6}$$

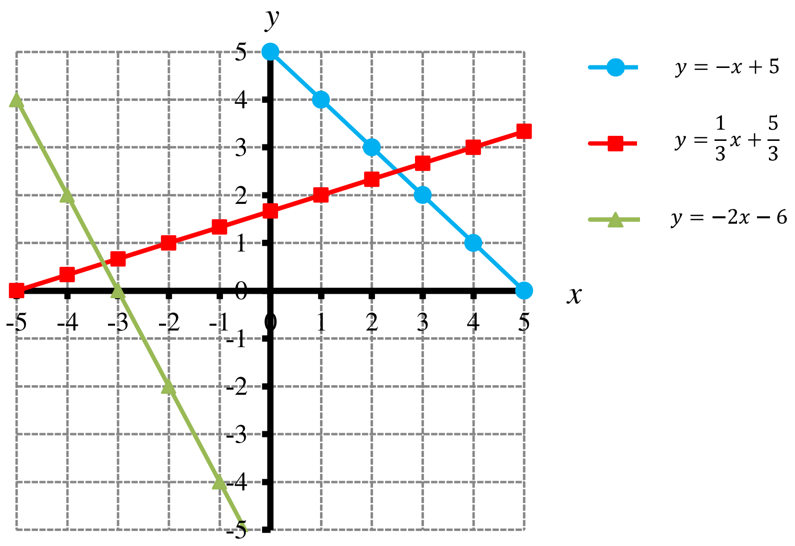
となる．(B.5) 式は $b=1+2a$ と書きかえることができるので，これを (B.6) 式の b に代入してやると，$2=a+(1+2a)=3a+1$．よって，$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{5}{3}$．

3. $(-3,0)$ と $(-2,-2)$ の組み合わせをそれぞれ $y=ax+b$ に代入すると，

$$0=-3a+b \tag{B.7}$$

$$-2=-2a+b \tag{B.8}$$

となる．(B.7) 式は $b=3a$ と書きかえることができるので，これを (B.8) 式の b に代入してやると，$-2=-2a+3a=a$．よって，$a=-2$，$b=-6$．



例題 B-10

1.

$$\begin{cases} 2x+y=4 & \text{(B.9)} \\ x+2=2y & \text{(B.10)} \end{cases}$$

(B.9) 式より $y=4-2x$ を (B.10) 式に代入すると $x+2=2(4-2x)=8-4x$ すなわち，$5x=6$ となり $x=\frac{6}{5}$．$y=4-2\times\frac{6}{5}=\frac{20-12}{5}=\frac{8}{5}$．

2.

$$\begin{cases} x+y=5 & \text{(B.11)} \\ x+2y=5 & \text{(B.12)} \end{cases}$$

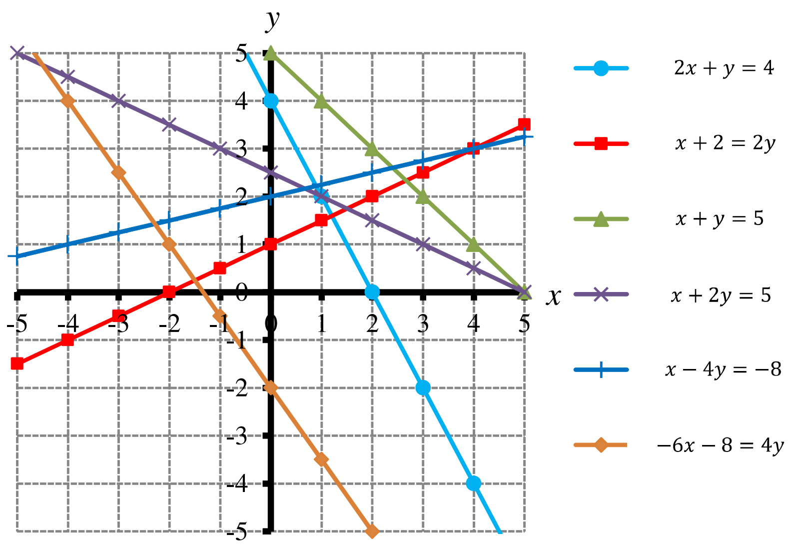
(B.11) 式より $y=5-x$ を (B.12) 式に代入すると $x+2(5-x)=5 \Leftrightarrow x+10-2x=5$．したがって $x=5$．$y=0$．

3.

$$\begin{cases} x-4y=-8 & \text{(B.13)} \\ -6x-8=4y & \text{(B.14)} \end{cases}$$

(B.13) 式より $y=\frac{x}{4}+2$ を (B.14) 式に代入すると，$-6x-8=4(\frac{x}{4}+2)=x+8$．したがって，$7x=-16$ より $x=-\frac{16}{7}$．この時，$y=-\frac{16}{7}\times\frac{1}{4}+2=-\frac{4}{7}+2=\frac{10}{7}$．

各 1 次関数を図示すると以下の図のようになる．



例題 B-11

1. (a) $y = 4ax - 12x + b^2x + a^2 + 16a = (4a + b^2 - 12)x + a(a + 16)$．よって，係数は $4a + b^2 - 12$，定数項は $a(a + 16)$．

   (b) $a^2y = 10y + 100ax - b^2x - 60ax + a^2 + 10b - 9b + by$

   $\Leftrightarrow (a^2 - b - 10)y = (100a - b^2 - 60a)x + a^2 + 10b - 9b$

   $\Leftrightarrow (a^2 - b - 10)y = (40a - b^2)x + a^2 + b$

   $\Leftrightarrow y = \frac{40a-b^2}{a^2-b-10}x + \frac{a^2+b}{a^2-b-10}$．よって，係数は $\frac{40a-b^2}{a^2-b-10}$，定数項は $\frac{a^2+b}{a^2-b-10}$．

2.

$$\begin{cases} y = (10 - a)x + 2b + 5 & \text{(B.15)} \\ y = (3 - a)x + 4 & \text{(B.16)} \end{cases}$$

(B.15) 式と (B.16) 式を使って y を消すと，$(10 - a)x + 2b + 5 = (3 - a)x + 4$ となる．これを x について解けばよい．

$[(10 - a) - (3 - a)]x = 4 - 2b - 5$

$\Leftrightarrow 7x = -(2b + 1)$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(2b+1)}{7}$

(B.16) 式に $x = \frac{-(2b+1)}{7}$ を代入して y について解くと，

$y = (3 - a) \times \frac{-(2b+1)}{7} + 4$

$\Leftrightarrow y = \frac{-(3-a)(2b+1)}{7} + 4$

$\Leftrightarrow y = \frac{-(6b+3-2ab-a)+28}{7}$

$\Leftrightarrow y = \frac{-6b-3+2ab+a+28}{7}$

$\Leftrightarrow y = \frac{a(2b+1)-6b+25}{7}$．よって，$x = \frac{-(2b+1)}{7}$，$y = \frac{a(2b+1)-6b+25}{7}$

B.4　非単調な関係を表す関数

例題 B-12

1 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の頂点の x 座標は $x = -\frac{b}{2a}$ であることを利用する．

1. $y = -4x^2 + 3x + 1$ の頂点の x 座標は $x = -\frac{3}{2\times(-4)} = \frac{3}{8}$．この時の y 座標は $y = -4\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{8}\right) + 1 = -4 \times \frac{9}{64} + \frac{9}{8} + 1 = -1 \times \frac{9}{16} + \frac{9}{8} + 1 = \frac{-9+18+16}{16} = \frac{25}{16}$．よって，

頂点座標は $(\frac{3}{8}, \frac{25}{16})$.

別解：平方完成を使った場合

$y = -4x^2 + 3x + 1 = -4\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) + 1$ となる．よって，

$y = -4\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{9}{16} + 1 = -4\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{25}{16}$ となることから，頂点座標は $(\frac{3}{8}, \frac{25}{16})$.

2. $y = -3x^2 + 6x + 1$ の頂点の x 座標は $x = -\frac{6}{2\times(-3)} = 1$．この時の y 座標は $y = -3 + 6 + 1 = 4$．よって，頂点座標は $(1, 4)$.

別解：平方完成を使った場合

$y = -3x^2 + 6x + 1 = -3\left(x^2 - 2x\right) + 1$ となる．よって，

$y = -3(x-1)^2 + 3 + 1 = -3(x-1)^2 + 4$ となることから，頂点座標は $(1, 4)$.

3. $y = -0.5x^2 + (10-a)x + 3$ の頂点の x 座標は $x = -\frac{10-a}{2\times(-0.5)} = 10 - a$．この時の y 座標は $y = -0.5(10-a)^2 + (10-a)^2 + 3 = 0.5(10-a)^2 + 3 = 0.5(100 - 20a + a^2) + 3 = 53 - 10a + 0.5a^2$．よって，頂点座標は $(10-a, 53-10a+0.5a^2)$.

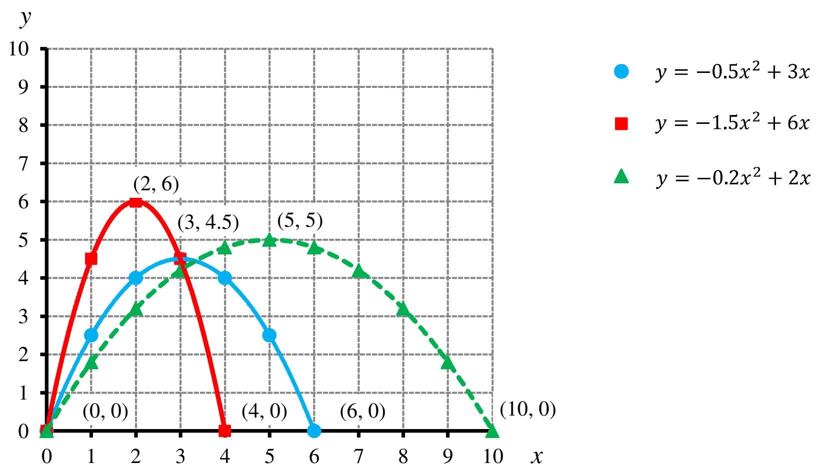
別解：平方完成を使った場合

$y = -0.5x^2 + (10-a)x + 3 = -0.5\left(x^2 - 2(10-a)x\right) + 3$ となる．よって，

$y = -0.5(x-(10-a))^2 + 0.5(10-a)^2 + 3 = -0.5(x-(10-a))^2 + 0.5(100 - 20a + a^2) + 3 = -0.5(x-(10-a))^2 + 53 - 10a + 0.5a^2$ となることから，

頂点座標は $(10-a, 53-10a+0.5a^2)$.

例題 B-13



しっかり基礎からミクロ経済学：**LQ** アプローチ
数学の復習（詳細版）

2016 年 3 月 15 日　第 1 版発行

著 者 梶 谷 真 也
鈴 木 史 馬

Shinya Kajitani and Shiba Suzuki

※この冊子は梶谷真也・鈴木史馬著『しっかり基礎からミクロ経済学－ LQ アプローチ』（日本評論社）の付録として作成しました.