第３章練習問題２

付録で説明される「**期待値繰り返しの法則（The law of iterated expectations）**」を適用します。これを適用すると、以下の１）、２）と３）が証明されます。

1. $E(u_i)=E[E(u_i|X_i)]=0$

2 $E(u_iX_i)=E[E(u_i|X_i)X_i]=Cov(u_iX_i)=0$

3. $Corr(u_iX_i)=\dfrac{Cov(u_iX_i)}{\sqrt{Var(u_i)Var(X_i)}}=0$

したがって、練習問題が証明されました。

付録：1. と 2. の証明。

教科書では、確立変数をu_i, X_iと表示しましたが、ここでは、確立変数をX, Yとし、離散確率分布を仮定して証明します。確率の記号は山本（１９９５）付録A.4 と同じです。また周辺確率、条件付き確率に関しては、山本付録A.4 を参照してください。

＜1.　の証明：**期待値繰り返しの法則（The law of iterated expectations）**＞

$$E(Y|X=x_j)=\sum_{i=1}^{n}y_iP(Y=y_i|X=x_j)$$

したがって

$$E[E(Y|X=x_j)]=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}y_iP(Y=y_i|X=x_j)P(X=x_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{P(Y=y_i,X=x_j)}{P(X=x_j)}P(X=x_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}y_iP(Y=y_i,X=x_j)=\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{j=1}^{n}P(Y=y_i,X=x_j)=\sum_{i=1}^{n}y_iP(Y=y_i)=E(Y)$$

ここで、$P(Y=y_i)$は辺Ｙの周　分布と呼ばれています。

詳しくは、山本（1995）の付録A.４を参照してください。

＜2.　の証明＞

$$E(Y|X=x_j)=\sum_{i=1}^{n}y_iP(Y=y_i|X=x_j)$$

したがって

$$E[E(Y|X=x_j)X]=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}y_ix_jP(Y=y_i|X=x_j)P(X=x_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}y_ix_j\frac{P(Y=y_i,X=x_j)}{P(X=x_j)}P(X=x_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}y_ix_jP(Y=y_i,X=x_j)=E(YX)$$