『数学セミナー』2020 年 3 月号
「高校数学ではじめる整数論」

連載●第 12 回
オイラーの無限積　付録

谷口 隆◎神戸大学大学院理学研究科

※ 式番号は本誌 2020 年 3 月号の連載と通しで振っています.

3 月号本誌で (10) の $H(x)$ をエータ関数とよびましたが，実際には $x = e^{2\pi iz}$ とした z の関数 $H(e^{2\pi iz})$ を $\eta(z)$ と書き，こちらが通常エータ関数と呼ばれています．(10) より $\eta(z)$ は

$$\eta(z) = e^{\frac{2\pi iz}{24}} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi ikz})$$

で定まる関数です．(11) により $\eta(z)$ は

$$\eta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{2\pi i}{24}(6n-1)^2 z} \tag{14}$$

と書くことができます．この付録では，(14) を用いて，次の定理[3] を証明します．

定理 4 (エータ関数の変換公式)　z を虚部が正である複素数とするとき，

$$\eta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \cdot \eta(z) \tag{15}$$

が成り立つ．ただし，$\sqrt{\frac{z}{i}}$ は $\frac{z}{i}$ の 2 つの平方根のうち，虚部が正の方を表す．　□

専門的な定理も少し使いますが，最終回なので，ちょっと背伸びをする気分で考えてみてください．以下では，$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ を $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ で表します．

[3] 本誌の (13) に誤植がありました．(13) の左辺の $H(e^{\frac{2\pi i}{z}})$ は，正しくは $H(e^{-\frac{2\pi i}{z}})$ です．

◎ーー1　フーリエ変換とポワソンの和公式

証明の準備として，ポワソンの和公式という公式を説明します．実数を定義域とする関数 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して，そのフーリエ変換 $\widehat{F}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$\widehat{F}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-2\pi ixy} dx \tag{16}$$

で定義します．

定理 5 (ポワソンの和公式)　関数 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ について，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(n) \tag{17}$$

が成り立つ．□

積分 (16) や和 (17) は，一般論としては収束が重要な問題になりますが，定理 4 の証明に用いる関数についてはこれらは収束するので，ここでは収束は問題にしないことにします．$f(x)$ で次の関数を表すことにします．

$$f(x) := e^{-\pi x^2} \tag{18}$$

f のフーリエ変換は f 自身になること，つまり

$$\widehat{f}(y) = e^{-\pi y^2} = f(y)$$

が知られています．これを使って定理 4 を証明します．

◎ーー2　テータ関数の変換公式

テータ関数という関数 $\theta(z)$ について，定理 4 によく似た変換公式があります．$\theta(z)$ の方が証明が単純なので，まずそれを証明して，その証明をどう拡張して定理 4 を証明するかを考えたいと思います．テータ関数は

$$\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi in^2 z} \tag{19}$$

で定義される関数です．(θ はシータと読まれることとテータと読まれることがあり，ここではテータです．)

定理 6 (テータ関数の変換公式)　z を虚部が正である複素数とするとき，

$$\theta\left(\frac{-1}{2z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \cdot \theta\left(\frac{z}{2}\right) \tag{20}$$

が成り立つ．ただし，$\sqrt{\frac{z}{i}}$ は $\frac{z}{i}$ の 2 つの平方根のうち，虚部が正の方を表す．□

証明　(20) の両辺は共に，z の虚部が正である範囲で，z の正則関数である．したがって，t を正の実数として，$z = ti$ のときに (20) が成り立つことを示せば，正則関数の一致の定理によって (20) が成立する．$z = ti$ のとき，(20) の両辺はそれぞれ (18) の f を用いて

$$\theta\left(\frac{-1}{2it}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2\cdot\frac{1}{t}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\sqrt{t}}\right),$$
$$\sqrt{t}\cdot\theta\left(\frac{it}{2}\right) = \sqrt{t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \sqrt{t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\sqrt{t}n\right)$$

と書ける．$t > 0$ を固定し，関数 $F(x)$ を $F(x) = f\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right)$ で定義し，F にポワソンの和公式を用いる．$\widehat{F}$ は次のような計算で，$\widehat{f}$ を用いて表せることがわかる．

$$\widehat{F}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) e^{-2\pi ixy}dx = \sqrt{t}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)2^{-2\pi ixy\sqrt{t}}dx = \sqrt{t}\cdot\widehat{f}\left(\sqrt{t}y\right) \tag{21}$$

ただし 2 つめの等号では x を $\sqrt{t}x$ で置き換えた．したがってポワソンの和公式 (17) により，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\sqrt{t}}\right), \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(n) = \sqrt{t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\sqrt{t}n\right)$$

は一致する．$\widehat{f} = f$ より，$z = ti$ のとき (20) が成り立つことが示された．■

◎——3　エータ関数の書き換え

改めて，定理 4 の証明を考えていきましょう．まず，(14) をポワソンの和公式が使いやすい形に書き直します．整数 n について，$\chi_{12}(n)$ を

$$\chi_{12}(n) = \begin{cases} 1 & n = \pm 1 \pmod{12}, \\ -1 & n = \pm 5 \pmod{12}, \\ 0 & (n, 12) \neq 1 \end{cases} \tag{22}$$

で定めます．ただし，$(n, 12)$ は n と 12 の最大公約数です．$(n, 12) = 1$ は $n \equiv \pm 1, \pm 5 \pmod{12}$ と同値なので，(22) ですべての整数 n について $\chi_{12}(n)$ が定まります．

命題 7

$$\eta(z) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_{12}(n) e^{\frac{1}{24}\cdot 2\pi i n^2 z} \tag{23}$$

が成り立つ．□

証明　まず，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n x^{\frac{1}{24}(6n-1)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{12}(m) x^{\frac{m^2}{24}} \tag{24}$$

が成り立つことを示す．左辺の和において，$\mathbb{Z}$ を

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \{2,4,6,8,\cdots\} \cup \{0,-2,-4,-6,\cdots\} \cup \{1,3,5,7,\cdots\} \cup \{-1,-3,-5,-7,\cdots\} \\ &= \{2k+2 \mid k \geqq 0\} \cup \{-2k \mid k \geqq 0\} \cup \{2k+1 \mid k \geqq 0\} \cup \{-2k-1 \mid k \geqq 0\}\end{aligned}$$

と分ける．すると，それぞれの部分の和は

$$\sum_{k\geqq 0} x^{\frac{1}{24}(12k+11)^2}, \qquad \sum_{k\geqq 0} x^{\frac{1}{24}(12k+1)^2}, \qquad -\sum_{k\geqq 0} x^{\frac{1}{24}(12k+5)^2}, \qquad -\sum_{k\geqq 0} x^{\frac{1}{24}(12k+7)^2}$$

になる．これら 4 つの和は (24) の右辺と一致するから，(24) が成り立つ．$\chi_{12}(-m) = \chi_{12}(m)$ であり，また $\chi_{12}(0) = 0$ だから

$$\sum_{m=1}^{\infty} \chi_{12}(m) x^{\frac{m^2}{24}} = \frac{1}{2} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi_{12}(m) x^{\frac{m^2}{24}}$$

である．$x = e^{2\pi i z}$ とおけば，(14) から (23) が得られる． ■

◎——4　ポワソンの和公式の一般化

$\eta(z)$ の (23) は $\theta(z)$ の (19) とだいぶ近い形になりましたが，(23) には χ_{12} があるので，ポワソンの和公式がそのままでは使えません．ポワソンの和公式を少し一般化することで，この問題に対応します．

M を正の整数とします．一般に $\chi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ は，$a, b \in \mathbb{Z}$ について，$a \equiv b \pmod{M}$ ならば $\chi(a) = \chi(b)$ であるとき，M を周期に持つと言います．このような χ について，$\widehat{\chi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を

$$\widehat{\chi}(b) = \sum_{a=0}^{M-1} \chi(a) e^{2\pi i \frac{ab}{M}} \tag{25}$$

で定めます．このとき，$\widehat{\chi}$ も M を周期に持ちます．この記号のもとで，次が成り立ちます．

命題 8　χ が M を周期にもつとき，$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ について

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) F(n) = \frac{1}{M} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\chi}(n) \widehat{F}\left(\frac{n}{M}\right) \tag{26}$$

が成り立つ． □

証明　左辺の和において，$n \in \mathbb{Z}$ を法 M で分けて考える．つまり

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{a=0}^{M-1} (a + M\mathbb{Z})$$

とする．ここで

$$a + M\mathbb{Z} = \{a + Mk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv a \pmod{M}\}$$

である．$n \in (a+M\mathbb{Z})$ ならば $\chi(n)=\chi(a)$ だから

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi(n)F(n) &= \sum_{a=0}^{M-1}\sum_{n\in(a+M\mathbb{Z})}\chi(n)F(n)\\ &= \sum_{a=0}^{M-1}\chi(a)\sum_{n\in(a+M\mathbb{Z})}F(n)\\ &= \sum_{a=0}^{M-1}\chi(a)\sum_{n\in\mathbb{Z}}F(a+Mn) \qquad (27)\end{aligned}$$

である．ここで，各 a について，$G_a\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を $G_a(x)=F(a+Mx)$ と定めると，

$$\widehat{G_a}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}F(a+Mx)e^{-2\pi ixy}dx=\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-2\pi i\frac{x-a}{M}y}dx=\frac{1}{M}e^{2\pi i\frac{ay}{M}}\widehat{F}\left(\frac{y}{M}\right)$$

である．ただし 2 番目の等号は，x を $\dfrac{x-a}{M}$ で置き換えた．したがって，(27) のそれぞれの n の和にポワソンの和公式を用いて，

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi(n)F(n) &= \frac{1}{M}\sum_{a=0}^{M-1}\chi(a)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{2\pi i\frac{an}{M}}\widehat{F}\left(\frac{n}{M}\right)\\ &= \frac{1}{M}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{a=0}^{M-1}\chi(a)e^{2\pi i\frac{an}{M}}\right)\widehat{F}\left(\frac{n}{M}\right)\end{aligned}$$

となる．内側の a についての和は $\widehat{\chi}(n)$ だから，(26) が示された． ■

◎——5　エータ関数の変換公式

エータ関数の表示 (23) に命題 8 を使うために，$\widehat{\chi_{12}}$ を知る必要があります．

命題 9　12 を周期に持つ (22) の χ_{12} について，$\widehat{\chi_{12}}(b)=2\sqrt{3}\chi_{12}(b)$ である． □

証明　$\widehat{\chi_{12}}$ は 12 を周期に持つので，$0 \leqq b \leqq 11$ について示せばよい．$\zeta=e^{\frac{2\pi i}{12}}$ とすると，

$$\widehat{\chi_{12}}(b)=\sum_{a=0}^{11}\chi_{12}(a)\zeta^{ab}=\zeta^{b}-\zeta^{5b}-\zeta^{7b}+\zeta^{11b}$$

である．$0 \leqq b \leqq 6$ についてこの値を計算すると，$\zeta^{12}=1$ に注意して

$$\widehat{\chi_{12}}(b) = \begin{cases} 1-1-1+1=0 & b=0, \\ \zeta-\zeta^5-\zeta^7+\zeta^{11}=2\sqrt{3} & b=1, \\ \zeta^2-\zeta^{10}-\zeta^2+\zeta^{10}=0 & b=2, \\ \zeta^3-\zeta^3-\zeta^9+\zeta^9=0 & b=3, \\ \zeta^4-\zeta^8-\zeta^4+\zeta^8=0 & b=4, \\ \zeta^5-\zeta-\zeta^{11}+\zeta^7=-2\sqrt{3} & b=5, \\ \zeta^6-\zeta^6-\zeta^6+\zeta^6=0 & b=6 \end{cases}$$

である．$7 \leqq b \leqq 11$ については，$\widehat{\chi_{12}}(b)=\widehat{\chi_{12}}(12-b)$ から計算でき，$\widehat{\chi_{12}}(b)=2\sqrt{3}\chi_{12}(b)$ が分かる． ■

以上で準備が整いました．

定理 4 の証明　(15) の両辺は z の正則関数だから，一致の定理から，$t>0$ として $z=ti$ について示せば十分である．$z=ti$ のとき (15) の両辺は，(23) によりそれぞれ

$$\eta\left(\frac{-1}{it}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_{12}(n)e^{-\frac{\pi n^2}{12t}}=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_{12}(n)f\left(\frac{n}{\sqrt{12t}}\right), \tag{28}$$

$$\sqrt{t}\cdot\eta(it)=\frac{\sqrt{t}}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_{12}(n)e^{-\frac{\pi n^2 t}{12}}=\frac{\sqrt{t}}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_{12}(n)f\left(\sqrt{\frac{t}{12}}\cdot n\right) \tag{29}$$

である．(26) で $\chi=\chi_{12}$, $F(x)=f\left(\dfrac{x}{\sqrt{12t}}\right)$ とする．(21) と同様の計算で，$\widehat{F}(y)=\sqrt{12t}\cdot\widehat{f}\left(\sqrt{12t}\cdot y\right)$ である．したがって命題 8 と命題 9 より

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_{12}(n)f\left(\frac{n}{\sqrt{12t}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{12}\sqrt{12t}\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_{12}(n)\widehat{f}\left(\sqrt{12t}\cdot\frac{n}{12}\right)=\sqrt{t}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_{12}(n)\widehat{f}\left(\sqrt{\frac{t}{12}}\cdot n\right)$$

である．$\widehat{f}=f$ により (28) と (29) は一致する． ■

◎——6　結びに

最後にいくつか，キーワードを挙げておきましょう．深入りはしませんが，整数論で重要な役割を持つので，興味のある人は調べてみてください．

6.1　モジュラー形式

定理 4 と定理 6 はそれぞれ，$\eta(z)$ と $\theta(z)$ が,「重さ $\dfrac{1}{2}$ のモジュラー形式」であることを示しています．

$$\Delta(z)=\eta(z)^{24}=e^{2\pi iz}\prod_{k=1}^{\infty}(1-e^{2\pi iz})^{24}$$

はデルタ関数または判別式関数とよばれます．$\eta(z)$ の重さが $\dfrac{1}{2}$ であることから，$\Delta(z)$ は重さが 12 のモジュラー形式になります．ラマヌジャンが予想した定理 3 も，モジュラー形式の理論を用いて証明されます．

テータ関数はエータ関数を用いて

$$\theta(z) = \frac{\eta(2z)^5}{\eta(z)^2\eta(4z)^2} \tag{30}$$

と表すことができます．これを使って，定理 4 から定理 6 を導くこともできます．

6.2　指標

定理 4 が成り立つ理由の一つはポワソンの和公式と $\widehat{f} = f$ がありますが，もう一つは命題 9 の公式 $\widehat{\chi_{12}}(b) = 2\sqrt{3}\chi_{12}(b)$ があります．χ_{12} と $\widehat{\chi_{12}}$ がこのような単純な関係を持つのは，χ_{12} が法 12 の指標になっていることが，その背景にあります．

定義 10　M を正の整数とする．次の条件をみたす $\chi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を，M を法とする指標という．

(i)　$a \equiv b \pmod M$ ならば，$\chi(a) = \chi(b)$.

(ii)　$(a, N) = 1$ ならば $\chi(a) \neq 0$.

(iii)　$(a, N) = 1$, $(b, N) = 1$ ならば $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.

(iv)　$(a, N) \neq 1$ ならば $\chi(a) = 0$.

(22) の χ_{12} については，(i),(ii),(iv) は定義からほとんど明らかで，(iii) も簡単な計算で確かめられます．指標は本連載でも何度か顔を出しました．2019 年 4 月号「素数のレース」で考えた χ_4 と χ_3 は，それぞれ法 4 と法 3 の指標です．2020 年 1 月号「ルジャンドル記号」では，奇素数 p を法とする指標について考えました．

なお，指標の定義は 2 通りの流儀があります．(i), (ii), (iii) は共通なのですが，(iv) については $(a, N) \neq 1$ となる a については $\chi(a)$ は考えず，定義域自体を M と素な整数の集合に制限することがあります．1 月号の指標の定義はそちらの流儀でした．代数的な考察をする場合はその方が話が単純になることが多く，一方今回のように解析的な考察をする場合は，(iv) のようにした方が便利なことが多いためです．

6.3　ヤコビの三重積公式

3 月号本誌では名前だけをあげたヤコビの三重積公式ですが，具体的には

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{2k})(1 + x^{2k-1}y)(1 + x^{2k-1}y^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}y^n \tag{31}$$

という式です．本稿では定理 1 と定理 2 の証明は考えませんでしたが，(31) を使うと簡単に示せるので，紹介しておきます．(31) で x を $x^{\frac{3}{2}}$，y を $-x^{-\frac{1}{2}}$ で置き換えると，簡単な計算で定理 1 の式 (5) が得られます．定理 2 を示すために，(31) を y の関数とみて，$f(y)$ とおきます．すると，$f'(y) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx^{n^2}y^{n-1}$ から $-xf'(-x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n nx^{n^2+n}$ です．この式で，x を $x^{\frac{1}{2}}$ に置き換えると，簡単な計算で，定理 2 の式 (6) の右辺と一致す

ることが分かります．一方，$f(-x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{n^2+n}=0$ であることから，

$$f'(-x)=\lim_{y\to -x}\frac{f(y)-f(-x)}{y-(-x)}=\lim_{y\to -x}\frac{f(y)}{y+x}$$

です．(31) の左辺の表示からこの極限を計算すると，これは $\dfrac{1}{-x}\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{2k})^3$ になります．これで (6) が得られます．

(31) で $y=1$ とすると，(30) も得られます．これは関係式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n-1})=\frac{\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{4n-2})}{\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1})}=\frac{\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})^2}{\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{4n})} \tag{32}$$

からしたがいます．

[たにぐち たかし]
[絵／森脇かみん]