『数学セミナー』2019 年 9 月号「高校数学ではじめる整数論」

連載●第 6 回

ラマヌジャンの論文集　付録

谷口 隆◎神戸大学大学院理学研究科

※ 式番号などは本誌 2019 年 9 月号の連載と通しで振っています.

◎—— $\sqrt[4]{\dfrac{2143}{22}}$ の作図について

論文集の 36 ページに，このような図が載っています.

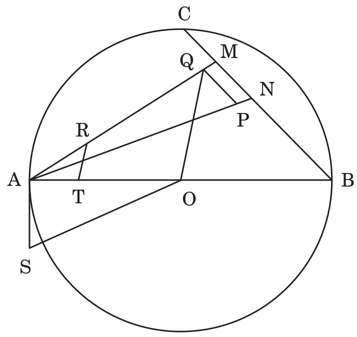

図 2　論文 36 ページの図

O を中心，AB を直径とする円を書き，以下の手順で作図します.（たとえば 3 番目の M は,「線分 CB 上で,

CM=AT となる点」を意味します．それぞれの点がどこに載っているかは，図を参照してください．)

C：上側の弧 AB の中点

T：AT：TO $= 1:2$

M：CM $=$ AT

N：MN $=$ AT

P：AP $=$ AM

Q：PQ$/\!/$ NM

R：TR$/\!/$ OQ

S：AS $\perp$ AO, AS $=$ AR

ラマヌジャンはこの作図手順を示した後,「OS と OB の相乗平均は，円周の長さの $\dfrac{1}{6}$ に非常に近い」と書いています．どうなるか計算してみましょう．

半径を 1 としておきます．AM の長さは，M から OB に垂線 MH をおろすと，$\mathrm{AH} = 1+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$, $\mathrm{MH} = 1-\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$ であることから，三平方の定理で計算できます．順に長さを計算していくと，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AM}^2 &= \left(1+\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 = 2\left(1+\frac{1}{18}\right) = \frac{19}{9},\\
\mathrm{AN}^2 &= \left(1+\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)^2 = 2\left(1+\frac{2}{9}\right) = \frac{22}{9},\\
\mathrm{AQ} &= \frac{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}} = \frac{\mathrm{AM}^2}{\mathrm{AN}} = \frac{19}{3\sqrt{22}},\\
\mathrm{AR} &= \frac{1}{3}\cdot\mathrm{AQ} = \frac{19}{9\sqrt{22}},\\
\mathrm{OS}^2 &= \mathrm{OA}^2+\mathrm{SA}^2 = 1+\left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2 = \frac{1}{9^2}\cdot\frac{2143}{22},\\
\sqrt{\mathrm{OS}\cdot\mathrm{OB}} &= \frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{2143}{22}} \fallingdotseq \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

となりました．仮に AB が地球の直径の長さなら，$\sqrt{\mathrm{OS}\cdot\mathrm{OB}}$ と円周の $\dfrac{1}{6}$ の長さの差は，0.2cm 程度です．

なお，一般に長さ a, b が与えられているとき，その相乗平均 $\sqrt{ab}$ は，次の図 3 のように作図できます．$\mathrm{AC} = a$, $\mathrm{CB} = b$ である線分を一直線につなぎます．AB を直径とする半円と，C を通る AB の垂線の交点を D とします．$\angle\mathrm{ADB} = 90^\circ$ なので，$\triangle\mathrm{ACD}$ と $\triangle\mathrm{DCB}$ は相似です．$\mathrm{AC}:\mathrm{CD} = \mathrm{CD}:\mathrm{CB}$ より $\mathrm{CD} = \sqrt{ab}$ です．

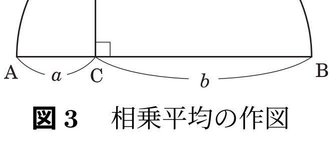

図 3　相乗平均の作図

◎—— 第一種楕円積分と超幾何関数

9 月号本誌の 3 節で，第一種楕円積分

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{3}$$

を紹介しました．形式的な話にとどまりますが，超幾何関数とよばれる関数との関係を説明します．

$$(1+t)^\alpha=1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\cdot t^2+\cdots$$

は，α が自然数のときお馴染みの二項展開ですが，実は $|t|<1$ の範囲では，任意の実数 α で成立します．(一般には無限級数になります．)　そこで $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ とし，t を $-t$ でおきかえると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-t}}=(1-t)^{-\frac{1}{2}}&=1+\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{t^2}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{t^3}{3!}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2}\right)\cdot\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

と，比較的きれいな形になります．$t=k^2\sin^2\theta$ として (3) の式に代入すると，

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2}\right)\cdot\frac{k^{2n}}{n!}\cdot\sin^{2n}\theta d\theta$$

と書けます．和と積分の順序を入れ替えれば (入れ替えてよいことにすれば),

$$K(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2}\right)\cdot\frac{k^{2n}}{n!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta d\theta$$

です．最後の積分は,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta d\theta=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$$

であることが，部分積分と数学的帰納法 [5] によって証明できます．これを代入すると,

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2}\right)^2\cdot\frac{k^{2n}}{(n!)^2} \tag{6}$$

という表示が得られます.

一方の超幾何関数ですが，これは

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta,\gamma;x)&=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\cdot x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{x^2}{2!}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\cdot\frac{x^n}{n!}\end{aligned} \tag{7}$$

で定義される関数です．(${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x)$ と書かれることもあります．)　(6) と (7) をよくよく見較べてみると,

$$K(k)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right)$$

[5] $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta d\theta$ とし，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta(-\cos\theta)'d\theta$ として部分積分をすると，$I_n=(2n-1)(I_{n-1}-I_n)$ が分かります．つまり，漸化式 $I_n=\frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$ が得られます.

という関係が見て取れると思います．

超幾何関数はとても面白い関数で，ラマヌジャンは好んで研究しました．現在でも，超幾何関数や各種の一般化は活発に研究されています．ラマヌジャンは論文集の 36 ページで，

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{4}\sum_{n\geqq 0}\frac{((2n)!)^3}{(n!)^6}\cdot\frac{6n+1}{4^{4n}}$$

を含む3つの公式が，$K(k)$ の研究から得られると書いてあります．そして，$r=\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6}$ のときの $F\left(r,1-r,1;x\right)$ から同様の考察で得られるという，(2) を含む 14 個の公式を列挙しています．(2) は $r=\dfrac{1}{4}$ のものを使います．

◎—— タウ数列

ラマヌジャンはタウ数列について，次の二つのパターンが観察されると述べています．

(A)　m,n が互いに素ならば，$\tau(mn)=\tau(m)\tau(n)$
(B)　p を素数，$k\geqq 0$ とすると，$\tau(p^{k+2})=\tau(p)\tau(p^{k+1})-p^{11}\tau(p^k)$

(A) は，表をみて「言われてみたらそうかな」という感じでしょうか．表にある $\tau(n)$ の素因数分解から，$(m,n)=(2,3),(2,7),(3,4),(3,5),(4,5)$ などの実例で，正しいことはすぐに分かると思います．もし (A) が一般に正しいとすると，n の素因数分解を $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ とすれば，(A) を繰り返し用いて

$$\tau(n)=\tau(p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k})=\tau(p_1^{e_1})\tau(p_2^{e_2})\cdots\tau(p_k^{e_k}) \tag{8}$$

となります．したがって数列 $\tau(n)$ は，素数の冪 p^k における値 $\tau(p^k)$ から決まることになります．

一方の (B) は，各素数 p についての，$\tau(p^k)(k=0,1,2,\cdots)$ がみたす三項間漸化式です．$\tau(p^0)=\tau(1)=1$ は分かっているので，漸化式は，$\tau(p)$ でこの数列が決まってしまうことを意味します．具体的には

$$\begin{aligned}
\tau(p^2)&=\tau(p)^2-p^{11}\tau(1) &&=\tau(p)^2-p^{11},\\
\tau(p^3)&=\tau(p)\tau(p^2)-p^{11}\tau(p) &&=\tau(p)^3-2p^{11}\tau(p),\\
\tau(p^4)&=\tau(p)\tau(p^3)-p^{11}\tau(p^2) &&=\tau(p)^4-3p^{11}\tau(p)^2+p^{22},\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

となります．

ここで突然ですが，

$$L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}$$

という関数を考えます．数列 $\tau(n)$ の「母関数」の一種ですね．(A) が成り立つことは，次の等式と同値です．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}=\prod_{p\,:\,\text{素数}}\left(1+\frac{\tau(p)}{p^s}+\frac{\tau(p^2)}{p^{2s}}+\frac{\tau(p^3)}{p^{3s}}+\cdots\right)$$

ただし右辺は，素数 p 全体をわたる積です．一方 (B) は，各素数 p について

$$1+\frac{\tau(p)}{p^s}+\frac{\tau(p^2)}{p^{2s}}+\frac{\tau(p^3)}{p^{3s}}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(p^k)}{p^{ks}}=\frac{1}{1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s}}$$

が成り立つことを意味します．(これは分母を払って計算すれば確かめられます．)　したがって (A), (B) が正しければ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}=\prod_{p\,:\,\text{素数}}\frac{1}{1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s}} \tag{9}$$

という，きれい (？) でまた何やら意味深長な式が得られます．この式が論文集の 153 ページに書かれています．

(9) のような，素数全体をわたる積をオイラー積といいます．連載の初回では，リーマンのゼータ関数の

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\frac{1}{1-p^{-s}} \tag{10}$$

というオイラー積を紹介しました．$u=p^{-s}$ とすると，(10) の右辺の分母の $1-p^{-s}$ は $1-u$ で，u の 1 次式ですが，(9) の右辺では

$$1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s}=1-\tau(p)u+p^{11}u^2 \tag{11}$$

と，u の 2 次式になります．このことから，(9) を，2 次のオイラー積といいます．

(A), (B) はほどなくしてモーデルという数学者によって証明されました．その証明方法は今となっては標準的で，技巧を凝らすという感じではありませんが，著しい点があります．それは，証明には複素関数論という理論 (大まかに言えば，複素数の微積分の理論) が本質的に用いられるということです．数列 $\tau(n)$ の定義が単純で初等的であることを考えると少し不思議な気分になるかも知れませんが，複素関数論を使わない初等的な証明は，現在でも知られていないようです．一言だけ触れると，$\tau(n)$ の定義に現れた $x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24}$ が「正則な保型形式」であることが，背後で鍵を握っています．

それまでに知られていたオイラー積は，すべて 1 次のもので，(9) は，文献上はじめて表れた 2 次のオイラー積でした．2 次以上のオイラー積は，フェルマーの最終定理や佐藤-テイト予想など，整数論の「進歩」を象徴するような多くの内容に関わっています．

(11) の 2 次式は，小さな素数 p で観察すると，根はいずれも虚数になっています．これは判別式が負だということで，つまり

(C)　p が素数ならば，$\tau(p)^2 \leqq 4p^{11}$

ではないかという予想になります．これも同じく 153 ページにあります[6]．これはラマヌジャン予想と呼ばれて，整数論の重要な問題として特に有名になりました.「正則な保型形式」については 1974 年に解決され，タウ数列の場合も成り立つことが分かりましたが,「非正則な保型形式」に拡張された問題は，今も大きな未解決問題として残っています．

タウ数列について話し始めるとついつい深みにはまってしまうのですが，もう少しだけつけ加えておきましょう．9 月号本誌では $n=30$ までの $\tau(n)$ の表を載せましたが，この付録の最後に $n=200$ までの表を載せました．一瞥して明らか，という感じではないのですが，$\tau(n)$ の素因数や合同式にもさまざまなパターンがあります．ひとつ例を挙げれば，$\tau(n)$ が奇数になるのは $n=1,9,25,49,81,\cdots$ と n が奇数の 2 乗になっているときのみであることが観察されます．

ほかに著しいものの例は，1970 年代になってダイソンとマクドナルドによって発見された，$\tau(n)$ の次の公

[6] 論文中の誤植で，153 ページには $\{2\tau(p)\}^2 \leqq p^{11}$ と書かれてあります．

式です．

$$\tau(n) = \frac{1}{1!2!3!4!} \sum_{\substack{x_i \equiv i \pmod 5 \quad (1 \leqq i \leqq 5) \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=10n}} \left(\prod_{1 \leqq i < j \leqq 5} (x_i - x_j) \right) \tag{12}$$

右辺の和は，ここに書かれてある条件をみたす整数の組 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 全体にわたる和です．

たとえば $n = 2$ だと，条件をみたす組は $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, -3, 3, -1, 0)$ の 1 組です．右辺は

$$\frac{4 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-6) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot 4 \cdot 3 \cdot (-1)}{1!2!3!4!} = -24$$

で，$\tau(2)$ と一致します．$n = 6$ なら条件をみたす組は $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-4, -3, 3, -1, 5), (1, -3, 3, 4, -5)$ の 2 組で，右辺は

$$(-1)^9 \cdot \frac{1 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6}{1!2!3!4!} + (-1)^5 \cdot \frac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9}{1!2!3!4!} = -3024 - 3024 = -6048$$

で，$\tau(6)$ と一致します．

n	$\tau(n)$	
1	$1 =$	1
2	$-24 =$	$-2^{3}3^{1}$
3	$252 =$	$2^{2}3^{2}7^{1}$
4	$-1472 =$	$-2^{6}23^{1}$
5	$4830 =$	$2^{1}3^{1}5^{1}7^{1}23^{1}$
6	$-6048 =$	$-2^{5}3^{3}7^{1}$
7	$-16744 =$	$-2^{3}7^{1}13^{1}23^{1}$
8	$84480 =$	$2^{9}3^{1}5^{1}11^{1}$
9	$-113643 =$	$-3^{4}23^{1}61^{1}$
10	$-115920 =$	$-2^{4}3^{2}5^{1}7^{1}23^{1}$
11	$534612 =$	$2^{2}3^{1}13^{1}23^{1}149^{1}$
12	$-370944 =$	$-2^{8}3^{2}7^{1}23^{1}$
13	$-577738 =$	$-2^{1}7^{1}29^{1}1423^{1}$
14	$401856 =$	$2^{6}3^{1}7^{1}13^{1}23^{1}$
15	$1217160 =$	$2^{3}3^{3}5^{1}7^{2}23^{1}$
16	$987136 =$	$2^{12}241^{1}$
17	$-6905934 =$	$-2^{1}3^{2}7^{1}23^{1}2383^{1}$
18	$2727432 =$	$2^{3}3^{5}23^{1}61^{1}$
19	$10661420 =$	$2^{2}5^{1}7^{2}11^{1}23^{1}43^{1}$
20	$-7109760 =$	$-2^{7}3^{1}5^{1}7^{1}23^{2}$
21	$-4219488 =$	$-2^{5}3^{2}7^{2}13^{1}23^{1}$
22	$-12830688 =$	$-2^{5}3^{2}13^{1}23^{1}149^{1}$
23	$18643272 =$	$2^{3}3^{1}617^{1}1259^{1}$
24	$21288960 =$	$2^{11}3^{3}5^{1}7^{1}11^{1}$
25	$-25499225 =$	$-5^{2}79^{1}12911^{1}$
26	$13865712 =$	$2^{4}3^{1}7^{1}29^{1}1423^{1}$
27	$-73279080 =$	$-2^{3}3^{6}5^{1}7^{1}359^{1}$
28	$24647168 =$	$2^{9}7^{1}13^{1}23^{2}$
29	$128406630 =$	$2^{1}3^{1}5^{1}11^{1}389111^{1}$
30	$-29211840 =$	$-2^{6}3^{4}5^{1}7^{2}23^{1}$
31	$-52843168 =$	$-2^{5}7^{2}67^{1}503^{1}$
32	$-196706304 =$	$-2^{15}3^{2}23^{1}29^{1}$
33	$134722224 =$	$2^{4}3^{3}7^{1}13^{1}23^{1}149^{1}$
34	$165742416 =$	$2^{4}3^{3}7^{1}23^{1}2383^{1}$
35	$-80873520 =$	$-2^{4}3^{1}5^{1}7^{2}13^{1}23^{2}$
36	$167282496 =$	$2^{6}3^{4}23^{2}61^{1}$
37	$-182213314 =$	$-2^{1}23^{1}3961159^{1}$
38	$-255874080 =$	$-2^{5}3^{1}5^{1}7^{2}11^{1}23^{1}43^{1}$
39	$-145589976 =$	$-2^{3}3^{2}7^{2}29^{1}1423^{1}$
40	$408038400 =$	$2^{10}3^{2}5^{2}7^{1}11^{1}23^{1}$
41	$308120442 =$	$2^{1}3^{1}7^{1}521^{1}14081^{1}$
42	$101267712 =$	$2^{8}3^{3}7^{2}13^{1}23^{1}$
43	$-17125708 =$	$-2^{2}23^{1}186149^{1}$
44	$-786948864 =$	$-2^{8}3^{1}13^{1}23^{2}149^{1}$
45	$-548895690 =$	$-2^{1}3^{5}5^{1}7^{1}23^{2}61^{1}$
46	$-447438528 =$	$-2^{6}3^{2}617^{1}1259^{1}$
47	$2687348496 =$	$2^{4}3^{1}7^{1}7998061^{1}$
48	$248758272 =$	$2^{14}3^{2}7^{1}241^{1}$
49	$-1696965207 =$	$-3^{1}7^{2}11543981^{1}$
50	$611981400 =$	$2^{3}3^{1}5^{2}79^{1}12911^{1}$

n	$\tau(n)$	
51	$-1740295368 =$	$-2^{3}3^{4}7^{2}23^{1}2383^{1}$
52	$850430336 =$	$2^{7}7^{1}23^{1}29^{1}1423^{1}$
53	$-1596055698 =$	$-2^{1}3^{3}23^{1}1285069^{1}$
54	$1758697920 =$	$2^{6}3^{7}5^{1}7^{1}359^{1}$
55	$2582175960 =$	$2^{3}3^{2}5^{1}7^{1}13^{1}23^{2}149^{1}$
56	$-1414533120 =$	$-2^{12}3^{1}5^{1}7^{1}11^{1}13^{1}23^{1}$
57	$2686677840 =$	$2^{4}3^{2}5^{1}7^{3}11^{1}23^{1}43^{1}$
58	$-3081759120 =$	$-2^{4}3^{2}5^{1}11^{1}389111^{1}$
59	$-5189203740 =$	$-2^{2}3^{1}5^{1}7^{1}29^{1}89^{1}4787^{1}$
60	$-1791659520 =$	$-2^{9}3^{3}5^{1}7^{2}23^{2}$
61	$6956478662 =$	$2^{1}7^{1}23^{1}59^{1}366169^{1}$
62	$1268236032 =$	$2^{8}3^{1}7^{2}67^{1}503^{1}$
63	$1902838392 =$	$2^{3}3^{4}7^{1}13^{1}23^{2}61^{1}$
64	$2699296768 =$	$2^{18}7^{1}1471^{1}$
65	$-2790474540 =$	$-2^{2}3^{1}5^{1}7^{2}23^{1}29^{1}1423^{1}$
66	$-3233333376 =$	$-2^{7}3^{4}7^{1}13^{1}23^{1}149^{1}$
67	$-15481826884 =$	$-2^{2}23^{1}47^{1}3580441^{1}$
68	$10165534848 =$	$2^{7}3^{2}7^{1}23^{2}2383^{1}$
69	$4698104544 =$	$2^{5}3^{3}7^{1}617^{1}1259^{1}$
70	$1940964480 =$	$2^{7}3^{2}5^{1}7^{2}13^{1}23^{2}$
71	$9791485272 =$	$2^{3}3^{2}61^{1}2229391^{1}$
72	$-9600560640 =$	$-2^{9}3^{5}5^{1}11^{1}23^{1}61^{1}$
73	$1463791322 =$	$2^{1}7^{1}104556523^{1}$
74	$4373119536 =$	$2^{4}3^{1}23^{1}3961159^{1}$
75	$-6425804700 =$	$-2^{2}3^{2}5^{2}7^{1}79^{1}12911^{1}$
76	$-15693610240 =$	$-2^{8}5^{1}7^{2}11^{1}23^{2}43^{1}$
77	$-8951543328 =$	$-2^{5}3^{1}7^{1}13^{2}23^{2}149^{1}$
78	$3494159424 =$	$2^{6}3^{3}7^{2}29^{1}1423^{1}$
79	$38116845680 =$	$2^{4}5^{1}23^{1}1721^{1}12037^{1}$
80	$4767866880 =$	$2^{13}3^{1}5^{1}7^{1}23^{1}241^{1}$
81	$1665188361 =$	$3^{8}253801^{1}$
82	$-7394890608 =$	$-2^{4}3^{2}7^{1}521^{1}14081^{1}$
83	$-29335099668 =$	$-2^{2}3^{1}7^{1}23^{1}283^{1}53653^{1}$
84	$6211086336 =$	$2^{11}3^{2}7^{2}13^{1}23^{2}$
85	$-33355661220 =$	$-2^{2}3^{3}5^{1}7^{2}23^{2}2383^{1}$
86	$411016992 =$	$2^{5}3^{1}23^{1}186149^{1}$
87	$32358470760 =$	$2^{3}3^{3}5^{1}7^{1}11^{1}389111^{1}$
88	$45164021760 =$	$2^{11}3^{2}5^{1}11^{1}13^{1}23^{1}149^{1}$
89	$-24992917110 =$	$-2^{1}3^{2}5^{1}7^{1}19^{1}23^{2}3947^{1}$
90	$13173496560 =$	$2^{4}3^{6}5^{1}7^{1}23^{2}61^{1}$
91	$9673645072 =$	$2^{4}7^{2}13^{1}23^{1}29^{1}1423^{1}$
92	$-27442896384 =$	$-2^{9}3^{1}23^{1}617^{1}1259^{1}$
93	$-13316478336 =$	$-2^{7}3^{2}7^{3}67^{1}503^{1}$
94	$-64496363904 =$	$-2^{7}3^{2}7^{1}7998061^{1}$
95	$51494658600 =$	$2^{3}3^{1}5^{2}7^{3}11^{1}23^{2}43^{1}$
96	$-49569988608 =$	$-2^{17}3^{4}7^{1}23^{1}29^{1}$
97	$75013568546 =$	$2^{1}7^{2}23^{1}163^{1}204173^{1}$
98	$40727164968 =$	$2^{3}3^{2}7^{2}11543981^{1}$
99	$-60754911516 =$	$-2^{2}3^{5}13^{1}23^{2}61^{1}149^{1}$
100	$37534859200 =$	$2^{6}5^{2}23^{1}79^{1}12911^{1}$

n	$\tau(n)$	
101	$81742959102 =$	$2^{1}3^{1}7^{1}1946260931^{1}$
102	$41767088832 =$	$2^{6}3^{5}7^{2}23^{1}2383^{1}$
103	$-225755128648 =$	$-2^{3}7^{1}23^{1}175275721^{1}$
104	$-48807306240 =$	$-2^{10}3^{1}5^{1}7^{1}11^{1}29^{1}1423^{1}$
105	$-20380127040 =$	$-2^{6}3^{3}5^{1}7^{3}13^{1}23^{2}$
106	$38305336752 =$	$2^{4}3^{4}23^{1}1285069^{1}$
107	$90241258356 =$	$2^{2}3^{3}23^{1}53^{1}685453^{1}$
108	$107866805760 =$	$2^{9}3^{6}5^{1}7^{1}23^{1}359^{1}$
109	$73482676310 =$	$2^{1}5^{1}23^{1}29^{1}59^{1}186727^{1}$
110	$-61972223040 =$	$-2^{6}3^{3}5^{1}7^{1}13^{1}23^{2}149^{1}$
111	$-45917755128 =$	$-2^{3}3^{2}7^{1}23^{1}3961159^{1}$
112	$-16528605184 =$	$-2^{15}7^{1}13^{1}23^{1}241^{1}$
113	$-85146862638 =$	$-2^{1}3^{1}23^{1}617006251^{1}$
114	$-64480268160 =$	$-2^{7}3^{3}5^{1}7^{3}11^{1}23^{1}43^{1}$
115	$90047003760 =$	$2^{4}3^{2}5^{1}7^{1}23^{1}617^{1}1259^{1}$
116	$-189014559360 =$	$-2^{7}3^{1}5^{1}11^{1}23^{1}389111^{1}$
117	$65655879534 =$	$2^{1}3^{4}7^{1}23^{1}29^{1}61^{1}1423^{1}$
118	$124540889760 =$	$2^{5}3^{2}5^{1}7^{1}29^{1}89^{1}4787^{1}$
119	$115632958896 =$	$2^{4}3^{2}7^{2}13^{1}23^{2}2383^{1}$
120	$102825676800 =$	$2^{12}3^{4}5^{2}7^{2}11^{1}23^{1}$
121	$498319933 =$	$127^{1}3923779^{1}$
122	$-166955487888 =$	$-2^{4}3^{1}7^{1}23^{1}59^{1}366169^{1}$
123	$77646351384 =$	$2^{3}3^{3}7^{2}521^{1}14081^{1}$
124	$77785143296 =$	$2^{11}7^{2}23^{1}67^{1}503^{1}$
125	$-359001100500 =$	$-2^{2}3^{1}5^{3}7^{1}23^{1}1486547^{1}$
126	$-45668121408 =$	$-2^{6}3^{5}7^{1}13^{1}23^{2}61^{1}$
127	$-262717201024 =$	$-2^{7}18049^{1}113717^{1}$
128	$338071388160 =$	$2^{21}3^{1}5^{1}11^{1}977^{1}$
129	$-4315678416 =$	$-2^{4}3^{2}7^{1}23^{1}186149^{1}$
130	$66971388960 =$	$2^{5}3^{2}5^{1}7^{2}23^{1}29^{1}1423^{1}$
131	$631528759932 =$	$2^{2}3^{1}7^{1}659^{1}11408497^{1}$
132	$-198311113728 =$	$-2^{10}3^{3}7^{1}13^{1}23^{2}149^{1}$
133	$-178514816480 =$	$-2^{5}5^{1}7^{3}11^{1}13^{1}23^{2}43^{1}$
134	$371563845216 =$	$2^{5}3^{1}23^{1}47^{1}3580441^{1}$
135	$-353937956400 =$	$-2^{4}3^{7}5^{2}7^{2}23^{1}359^{1}$
136	$-583413304320 =$	$-2^{10}3^{3}5^{1}7^{1}11^{1}23^{1}2383^{1}$
137	$-297198746214 =$	$-2^{1}3^{1}23^{1}71^{1}30332593^{1}$
138	$-112754509056 =$	$-2^{8}3^{4}7^{1}617^{1}1259^{1}$
139	$596793577940 =$	$2^{2}5^{1}7^{1}31^{1}1873^{1}73417^{1}$
140	$119045821440 =$	$2^{10}3^{1}5^{1}7^{2}13^{1}23^{3}$
141	$677211820992 =$	$2^{6}3^{3}7^{2}7998061^{1}$
142	$-234995646528 =$	$-2^{6}3^{3}61^{1}2229391^{1}$
143	$-308865667656 =$	$-2^{3}3^{1}7^{1}13^{1}23^{1}29^{1}149^{1}1423^{1}$
144	$-112181096448 =$	$-2^{12}3^{4}23^{1}61^{1}241^{1}$
145	$620204022900 =$	$2^{2}3^{2}5^{2}7^{1}11^{1}23^{1}389111^{1}$
146	$-35130991728 =$	$-2^{4}3^{1}7^{1}104556523^{1}$
147	$-427635232164 =$	$-2^{2}3^{3}7^{3}11543981^{1}$
148	$268217998208 =$	$2^{7}23^{2}3961159^{1}$
149	$-1115433620850 =$	$-2^{1}3^{1}5^{2}23^{1}337^{1}959389^{1}$
150	$154219312800 =$	$2^{5}3^{3}5^{2}7^{1}79^{1}12911^{1}$

n	$\tau(n)$	
151	$-824447297848 =$	$-2^{3}69191^{1}1489441^{1}$
152	$900676761600 =$	$2^{11}3^{1}5^{2}7^{2}11^{2}23^{1}43^{1}$
153	$784811057562 =$	$2^{1}3^{6}7^{1}23^{2}61^{1}2383^{1}$
154	$214837039872 =$	$2^{8}3^{2}7^{1}13^{2}23^{2}149^{1}$
155	$-255232501440 =$	$-2^{6}3^{1}5^{1}7^{3}23^{1}67^{1}503^{1}$
156	$214308444672 =$	$2^{9}3^{2}7^{2}23^{1}29^{1}1423^{1}$
157	$1315116754406 =$	$2^{1}7^{1}13^{1}23^{2}1721^{1}7937^{1}$
158	$-914804296320 =$	$-2^{7}3^{1}5^{1}23^{1}1721^{1}12037^{1}$
159	$-402206035896 =$	$-2^{3}3^{5}7^{1}23^{1}1285069^{1}$
160	$-950091448320 =$	$-2^{16}3^{3}5^{1}7^{1}23^{2}29^{1}$
161	$-312162946368 =$	$-2^{6}3^{1}7^{1}13^{1}23^{1}617^{1}1259^{1}$
162	$-39964520664 =$	$-2^{3}3^{9}253801^{1}$
163	$-357832759588 =$	$-2^{2}89458189897^{1}$
164	$-453553290624 =$	$-2^{7}3^{1}7^{1}23^{1}521^{1}14081^{1}$
165	$650708341920 =$	$2^{5}3^{4}5^{1}7^{2}13^{1}23^{2}149^{1}$
166	$704042392032 =$	$2^{5}3^{2}7^{1}23^{1}283^{1}53653^{1}$
167	$2754833892216 =$	$2^{3}3^{1}7^{1}16397820787^{1}$
168	$-356462346240 =$	$-2^{14}3^{3}5^{1}7^{2}11^{1}13^{1}23^{1}$
169	$-1458379197393 =$	$-3^{1}23^{1}367^{1}57591091^{1}$
170	$800535869280 =$	$2^{5}3^{4}5^{1}7^{2}23^{2}2383^{1}$
171	$-1211595753060 =$	$-2^{2}3^{4}5^{1}7^{2}11^{1}23^{2}43^{1}61^{1}$
172	$25209042176 =$	$2^{8}23^{2}186149^{1}$
173	$-950387449578 =$	$-2^{1}3^{1}7^{1}311^{1}72759719^{1}$
174	$-776603298240 =$	$-2^{6}3^{4}5^{1}7^{1}11^{1}389111^{1}$
175	$426959023400 =$	$2^{3}5^{2}7^{1}13^{1}23^{1}79^{1}12911^{1}$
176	$527734751232 =$	$2^{14}3^{1}13^{1}23^{1}149^{1}241^{1}$
177	$-1307679342480 =$	$-2^{4}3^{3}5^{1}7^{2}29^{1}89^{1}4787^{1}$
178	$599830010640 =$	$2^{4}3^{3}5^{1}7^{1}19^{1}23^{2}3947^{1}$
179	$1681384224780 =$	$2^{2}3^{2}5^{1}13^{1}3319^{1}216493^{1}$
180	$807974455680 =$	$2^{7}3^{5}5^{1}7^{1}23^{3}61^{1}$
181	$-996774496018 =$	$-2^{1}7^{1}23^{1}3095572969^{1}$
182	$-232167481728 =$	$-2^{7}3^{1}7^{2}13^{1}23^{1}29^{1}1423^{1}$
183	$1753032622824 =$	$2^{3}3^{2}7^{2}23^{1}59^{1}366169^{1}$
184	$1574983618560 =$	$2^{12}3^{2}5^{1}11^{1}617^{1}1259^{1}$
185	$-880090306620 =$	$-2^{2}3^{1}5^{1}7^{1}23^{2}3961159^{1}$
186	$319595480064 =$	$2^{10}3^{3}7^{3}67^{1}503^{1}$
187	$-3691995187608 =$	$-2^{3}3^{3}7^{1}13^{1}23^{2}149^{1}2383^{1}$
188	$-3955776986112 =$	$-2^{10}3^{1}7^{1}23^{1}7998061^{1}$
189	$1226984915520 =$	$2^{6}3^{6}5^{1}7^{2}13^{1}23^{1}359^{1}$
190	$-1235871806400 =$	$-2^{6}3^{2}5^{2}7^{3}11^{1}23^{2}43^{1}$
191	$2762403350592 =$	$2^{6}3^{1}23^{1}37^{1}16906601^{1}$
192	$680222785536 =$	$2^{20}3^{2}7^{2}1471^{1}$
193	$5442387685442 =$	$2^{1}37^{1}73545779533^{1}$
194	$-1800325645104 =$	$-2^{4}3^{1}7^{2}23^{1}163^{1}204173^{1}$
195	$-703199584080 =$	$-2^{4}3^{3}5^{1}7^{3}23^{1}29^{1}1423^{1}$
196	$2497932784704 =$	$2^{6}3^{1}7^{2}23^{1}11543981^{1}$
197	$-2876091504354 =$	$-2^{1}3^{2}149^{1}1072368197^{1}$
198	$1458117876384 =$	$2^{5}3^{6}13^{1}23^{2}61^{1}149^{1}$
199	$728391402200 =$	$2^{3}5^{2}7^{1}11^{1}23^{1}2056441^{1}$
200	$-2154174528000 =$	$-2^{9}3^{1}5^{3}11^{1}79^{1}12911^{1}$

[たにぐち たかし]
[絵／森脇かみん]