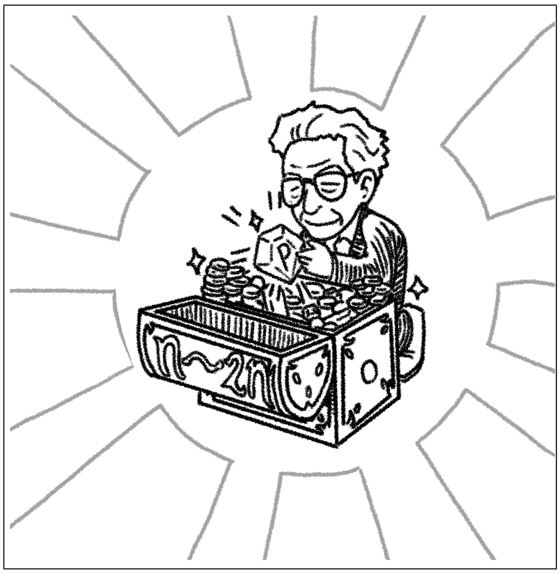
『数学セミナー』2019 年 8 月号「高校数学ではじめる整数論」



連載●第 5 回

ベルトランの仮説　付録

谷口 隆◎神戸大学大学院理学研究科

※ 式番号などは本誌 2019 年 8 月号の連載と通しで振っています.

今月はあまり付け加える内容がありませんが，本稿に出てきた関数 $f(x)$, $g(x)$ の性質を確認しておきます.

◎—— $f(x)$ について

$x > 0$ で定義された関数

$$f(x) := \frac{\log 2}{3} \cdot x^2 - 2x \log x$$

について，$x \geqq 2^5$ ならば $f(x) > 0$ であることを示します.

$$f(2^5) = 2^5 \left(\frac{\log 2}{3} \cdot 2^5 - 2 \log 2^5 \right) = 2^5 \cdot \left(\frac{2^5}{3} - 10 \right) \log 2 = \frac{2^6 \log 2}{3} > 0$$

なので，$x \geqq 2^5$ で $f'(x) > 0$ であることを示せば十分です.

$$f'(x) = \frac{2 \log 2}{3} x - 2 \log x - 2,$$
$$f''(x) = 2 \left(\frac{\log 2}{3} - \frac{1}{x} \right)$$

です．$e = 2.71 \cdots$ は $2\sqrt{2} = 2.82 \cdots$ より小さいので,

$$\log 2 = \frac{1}{\log_2 e} > \frac{1}{\log_2 (2\sqrt{2})} = \frac{2}{3}$$

です．したがって $x > \dfrac{9}{2}$ のとき $f''(x) > 0$ となり，この範囲で $f'(x)$ は増加関数であることが分かります.

$$f'(2^5) = \left(\frac{2^6}{3} - 10 \right) \log 2 - 2 = \frac{34}{3} \log 2 - 2 > \frac{34}{3} \cdot \frac{2}{3} - 2 > 0$$

なので，$x \geqq 2^5$ で $f'(x) > 0$ です.

◎—— $g(x)$ について

　$x > 0$ で定義された関数

$$g(x) := \frac{\log 2}{6} \cdot \frac{x^2}{\log x} - x$$

が，$x > 2^4$ で単調増加であることを示します．$a = \log 2$ とおきます．

$$g'(x) = \frac{ax(2\log x - 1) - 6(\log x)^2}{6(\log x)^2}$$

なので，この分子を $h(x)$ とおきます．つまり，

$$h(x) := 6(\log x)^2 g'(x) = ax(2\log x - 1) - 6(\log x)^2$$

です．$g'(x)$ と $h(x)$ の符号は一致するので，$x > 2^4$ で $h(x) > 0$ であることを示せば十分です．

$$h'(x) = a + 2\left(a - \frac{6}{x}\right)\log x$$

であり，$a > \dfrac{2}{3}$ だから，$x > 9$ で $h'(x) > 0$ です．よってこの範囲で $h(x)$ は単調増加です．$h(2^4) = 16a(2a-1) > 0$ なので，$x > 2^4$ ならば $h(x) > 0$ となります．

　なお，$n = 10^{100}$ とすると，

$$g(\sqrt{2n}) = g(\sqrt{2 \cdot 10^{100}}) = \frac{2 \cdot 10^{100}}{3(1 + 100\log_2 10)} - 10^{50}\sqrt{2}$$

です．$\log_2 10 < 3.322$ を使うと，この値が $> 2 \cdot 10^{97}$ であることが分かります．

　注　$\log_2 10 < 3.322$ は，対数表などによらずに手計算で確かめるのは少し面倒かも知れません．比較的容易に導ける評価は，$10^3 = 1000 < 1024 = 2^{10}$ に基づく $\log_2 10 < \dfrac{10}{3}$ ですが，この評価では上の値が $> 2 \cdot 10^{97}$ であることは示せません．(1.994×10^{97} ぐらいになります．)

[たにぐち たかし]
[絵／森脇かみん]