『数学セミナー』2019年5月号「高校数学ではじめる整数論」

連載●第 2 回

関とベルヌーイの数列　付録

谷口 隆◎神戸大学大学院理学研究科

※ 式番号は本誌 2019 年 5 月号の連載と通しで振っています.

◎—— (a)

(3) で $j=10$ とすると,

$$S_{10}(n)=\binom{10}{0}B_0\frac{n^{11}}{11}+\binom{10}{1}B_1\frac{n^{10}}{10}+\binom{10}{2}B_2\frac{n^9}{9}+\cdots+\binom{10}{9}B_9\frac{n^2}{2}+\binom{10}{10}B_{10}\frac{n^1}{1}$$

です. $B_3=B_5=B_7=B_9=0$ に注意して計算すれば,

$$\begin{aligned}S_{10}(n)&=B_0\frac{n^{11}}{11}+10B_1\frac{n^{10}}{10}+45B_2\frac{n^9}{9}+210B_4\frac{n^7}{7}+210B_6\frac{n^5}{5}+45B_8\frac{n^3}{3}+B_{10}n\\&=\frac{n^{11}}{11}+\frac{n^{10}}{2}+\frac{5n^9}{6}-n^7+n^5-\frac{n^3}{2}+\frac{5n}{66}\end{aligned}$$

となります.（ベルヌーイはこれに $n=1000$ を代入して,

$$1^{10}+2^{10}+\cdots+1000^{10}=91409924241424243424241924242500$$

を得ました.）

◎—— (b)

(4) と (7) から

$$h(x)=\frac{e^{nx}-1}{x}\cdot\frac{xe^x}{e^x-1}=\frac{1}{x}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}n^\ell\frac{x^\ell}{\ell!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{x^k}{k!}\right)=\sum_{k\geqq 0,\ell\geqq 1}\frac{n^\ell B_k}{k!\ell!}x^{k+\ell-1}$$

です. 和における $k+\ell-1$ は 0 以上の整数値を取るので, $j\geqq 0$ ごとに, $k+\ell-1=j$ となる (k,ℓ) の組で和をまとめます. そうすると,

$$h(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{k\geqq 0,\ell\geqq 1\\k+\ell-1=j}}\frac{j!}{k!\ell!}n^\ell B_k\right)\frac{x^j}{j!}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{k\geqq 0,\ell\geqq 1\\k+\ell-1=j}}\frac{j!}{k!(\ell-1)!}B_k\frac{n^\ell}{\ell}\right)\frac{x^j}{j!}$$

となります．$k+\ell-1=j$ より $\dfrac{j!}{k!(\ell-1)!}=\dbinom{j}{k}$ であり，また $\ell=j+1-k$ だから，

$$h(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}B_k\frac{n^{j+1-k}}{j+1-k}\right)\frac{x^j}{j!}$$

です．

◎—— (c)

一般に，テイラー展開できる関数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$ について，$f(-x)$ のテイラー展開は

$$f(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\frac{x^n}{n!}$$

となります．$f(x)$ が偶関数，つまり $f(x)=f(-x)$ であれば，

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\frac{x^n}{n!}$$

なので，すべての n で $a_n=(-1)^n a_n$ が成り立ちます．したがって，すべての奇数 n について $a_n=-a_n$，つまり $a_n=0$ となります．

この一般論を踏まえれば，(7) より，

$$f(x):=\frac{xe^x}{e^x-1}-B_1x=\frac{xe^x}{e^x-1}-\frac{x}{2}$$

が偶関数であることを示せばよいことになります．簡単な計算で，$f(-x)=f(x)$ が分かります．

◎—— (d)

オイラーの公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

で x を $-x$ にすると，

$$e^{-ix}=\cos(-x)+i\sin(-x)=\cos x-i\sin x$$

になります．この 2 つの式から

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \tag{13}$$

が得られます．(4) で x を ix, $-ix$ に置き換えると，それぞれ

$$e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-i\frac{x^7}{7!}+\cdots$$
$$e^{-ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ix)^n}{n!}=1-ix-\frac{x^2}{2!}+i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+i\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

となります．これらを加えて 2 で割ると

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

が，また差をとって $2i$ で割ると

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

が得られます．

◎—— (e)

まず (13) を使って計算すると，

$$x\cot x = x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = x \cdot \frac{\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}} = ix \cdot \frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1} = ix\left(\frac{2e^{2ix}}{e^{2ix}-1} - 1\right) = \frac{2ix \cdot e^{2ix}}{e^{2ix}-1} - ix$$

です．最後の式の第一項は，(7) の左辺で x を $2ix$ に置き換えたものだから，それを代入して，

$$x\cot x = \sum_{n \geqq 0} B_n \frac{(2ix)^n}{n!} - ix$$

です．ここで，3 以上の奇数 n で $B_n = 0$ となることを使うと，右辺にある和は n が偶数のときと $n = 1$ のときの和になるので，

$$x\cot x = \left(\underbrace{\sum_{k \geqq 0} B_{2k} \frac{(2ix)^{2k}}{(2k)!}}_{n\text{ が偶数}} + \underbrace{B_1 \frac{2ix}{1!}}_{n=1}\right) - ix = \sum_{k \geqq 0}(-4)^k B_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + 2B_1 ix - ix$$

となります．$B_1 = \dfrac{1}{2}$ により (10) が得られます．

◎—— (f)

はじめの式は，倍角公式から

$$\cot x - 2\cot 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x \cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

で得られます．よって (10) より

$$\begin{aligned} x\tan x = x\cot x - 2x\cot 2x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-4)^k B_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty}(-4)^k B_{2k} \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-4)^k (1-4^k) B_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

です．ここで，この和の $k=0$ の項は 0 であることから，

$$x\tan x=\sum_{k=1}^{\infty}(-4)^k(1-4^k)B_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

とできます．さらに右辺が x で割れることに注意し，両辺を x で割って

$$\tan x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-4)^k(1-4^k)B_{2k}}{2k}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \tag{14}$$

が得られます．

補　(14) に出てきた $\tan x$ のテイラー展開の係数

$$T_{2k-1}:=\frac{(-4)^k(1-4^k)B_{2k}}{2k}$$

はタンジェント数 (正接数) と呼ばれて，面白いことに，必ず正の整数になります．T_{19} までの値を表にしておきます．

$2k-1$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
T_{2k-1}	1	2	16	272	7936	353792	22368256	1903757312	209865342976	29088885112832

T_{2k-1} は,「交代順列」とよばれる，ある種の組み合わせの個数として解釈できることも知られています．

◎—— (g)

(11) より

$$x\cot x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-\pi^2n^2}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\pi^2n^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2n^2}}$$

となります．ここで，$t+t^2+t^3+\cdots=\dfrac{t}{1-t}$ だから，これを $t=\dfrac{x^2}{\pi^2n^2}$ で用いると，

$$x\cot x=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)^k\right)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{2k}n^{2k}}\cdot x^{2k}$$

となって，$x\cot x$ のテイラー展開ができます．この展開を，n の和を先に計算することで整理すると，

$$x\cot x=1-2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)\frac{1}{\pi^{2k}}\cdot x^{2k}=1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}x^{2k}$$

となります．これと (10) の係数を見較べると，(12) が得られました．

[たにぐち たかし]
[絵／森脇かみん]