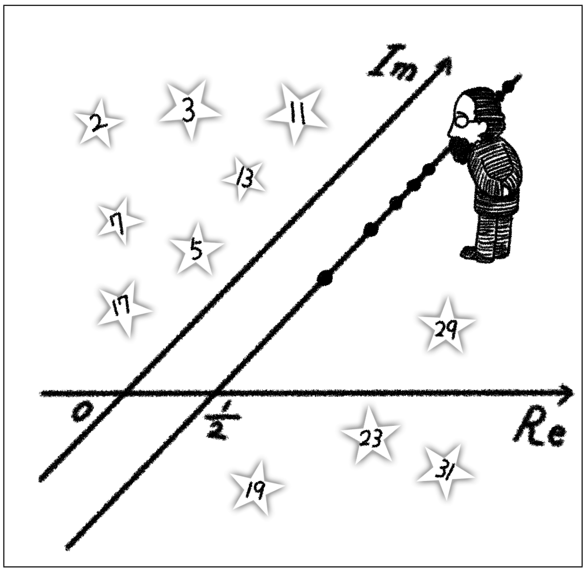
『数学セミナー』2019 年 4 月号「高校数学ではじめる整数論」

連載●第 1 回

素数のレース　付録

谷口 隆◎神戸大学大学院理学研究科



※ 式番号は本誌 2019 年 4 月号の連載と通しで振っています.

◎—— (a)

$\mathrm{Re}(s) > 0$ のときに，無限和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \tag{5}$$

が収束することを示します.

$$(\bigstar) \quad \text{複素数の級数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は，絶対値を取った正項級数} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ が収束するとき収束する}$$

という判定法を使います．(5) の級数は各項の絶対値を取ると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| dx \tag{6}$$

となります．右辺の絶対値の中身 $\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}$ について考えましょう．$n \leqq x \leqq n+1$ であればこれは「小さい」はずです．その捉え方として，これを定積分の値とみる方法があります．つまり，

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} = -\left[\frac{1}{t^s} \right]_n^x = -\int_n^x \left(\frac{1}{t^s} \right)' dt = s \int_n^x \frac{dt}{t^{s+1}}$$

とします．すると，$|t^{s+1}| = t^{\mathrm{Re}(s)+1}$ に注意して，$n \leqq x \leqq n+1$ の範囲で

$$\left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| = |s| \left| \int_n^x \frac{dt}{t^{s+1}} \right| \leqq |s| \int_n^x \frac{dt}{|t^{s+1}|} = |s| \int_n^x \frac{dt}{t^{\mathrm{Re}(s)+1}} \leqq |s| \int_n^x \frac{dt}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}} \leqq \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}$$

となりました．この評価を (6) に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| \leqq |s| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}$$

となります．右辺の和は $\mathrm{Re}(s)+1>1$ のとき，つまり $\mathrm{Re}(s)>0$ のとき収束します．したがって左辺の和も，$\mathrm{Re}(s)>0$ のとき収束します [3]．(★) の判定法より，これで級数 (5) が $\mathrm{Re}(s)>0$ のとき収束することも分かりました．

注 同様の方法で，$L(s,\chi_4)$ と $L(s,\chi_3)$ を定める級数が，$\mathrm{Re}(s)>0$ で収束することも証明できます．

◎—— (b)

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots\right) \tag{7}$$

を示します．ところで，よく考えてみると，無限積を目にすることはあまりありませんね．そこで，まずその定義を考え直しておきましょう．無限和ならよく目にすることと思います．無限和の定義は何だったかというと，それは有限和の極限，つまり

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n:=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n\right)$$

でした．ならば，無限積はやはり有限積の極限，つまり

$$\prod_{n=1}^{\infty}a_n:=\lim_{N\to\infty}\left(\prod_{n=1}^{N}a_n\right)$$

のはずですね．(7) の右辺を見ると，素数についての無限積です．だから，N 以下の素数の積を

$$\zeta_N(s):=\prod_{p\leqq N}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots\right)$$

と定め，これの $N\to\infty$ の極限が $\zeta(s)$ になることを示せばよいでしょう．

さて，この $\zeta_N(s)$ はいったいどんなものでしょうか？　たとえば $N=3$ とすると，$p\leqq N$ となる素数は 2 と 3 なので，

$$\zeta_3(s)=\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{2^{3s}}+\frac{1}{2^{4s}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{3^{3s}}+\frac{1}{3^{4s}}+\cdots\right)$$

です．積を展開するとたくさん項が出てきますが，それらはいずれも $\dfrac{1}{2^{ks}}\cdot\dfrac{1}{3^{\ell s}}$ という形をしています．これで k,ℓ が 0 以上の整数であるものがすべて 1 度ずつ出てきます．つまり，

$$\zeta_3(s)=\sum_{k,\ell\geqq 0}\frac{1}{2^{ks}}\cdot\frac{1}{3^{\ell s}}=\sum_{k,\ell\geqq 0}\frac{1}{(2^k\cdot 3^\ell)^s}$$

です．k,ℓ が 0 以上の整数全体を動くとき，$2^k\cdot 3^\ell$ は，素因数が 2 と 3 のみであるような正の整数全体を動くことになります．したがって，$\zeta_3(s)$ はこんな風に表すことができます．

$$\zeta_3(s)=\sum_{\substack{\text{素因数が 2 と 3 のみ}\\ \text{であるような正の整数 } n}}\frac{1}{n^s}$$

---

[3] 非負の実数からなる数列 $\{b_n\}$ について，$b_n\leqq c_n$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ が収束するような数列 $\{c_n\}$ が存在すれば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ は収束します．これは,「有界で広義単調増加である数列は収束する」という事実を用いれば，すぐに証明できます．

では一般の N ならどうでしょう．同じように考えれば

$$\zeta_N(s) = \sum_{\substack{\text{素因数がすべて } N \text{ 以下} \\ \text{であるような正の整数 } n}} \frac{1}{n^s} \tag{8}$$

となります．確かめてみてください．

さて，これと

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqq 1} \frac{1}{n^s} \tag{9}$$

を見比べましょう．(8) の右辺は (9) の右辺の部分和です．そしてどんな正の整数 n も，十分大きく N を取れば，素因子はすべて N 以下になります．したがって $\dfrac{1}{n^s}$ は，そのような N についての $\zeta_N(s)$ の和の一項になります．だから，$\zeta_N(s)$ は $N \to \infty$ のとき $\zeta(s)$ に収束するわけです．

最後は，やや直観的な説明になりました．解析的にきっちりやるなら，$\mathrm{Re}(s) > 1$ として

$$\begin{aligned}
|\zeta(s) - \zeta_N(s)| &= \left| \sum_{\substack{N \text{ より大きな素因数を} \\ \text{持つような正の整数 } n}} \frac{1}{n^s} \right| \leqq \sum_{\substack{N \text{ より大きな素因数を} \\ \text{持つような正の整数 } n}} \left| \frac{1}{n^s} \right| \\
&\leqq \sum_{n > N} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n > N} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \leqq \int_N^\infty \frac{dx}{x^{\mathrm{Re}(s)}} = \frac{N^{1-\mathrm{Re}(s)}}{\mathrm{Re}(s) - 1} \longrightarrow 0 \qquad (N \to \infty)
\end{aligned}$$

のようになります．

[たにぐち たかし]
[絵／森脇かみん]