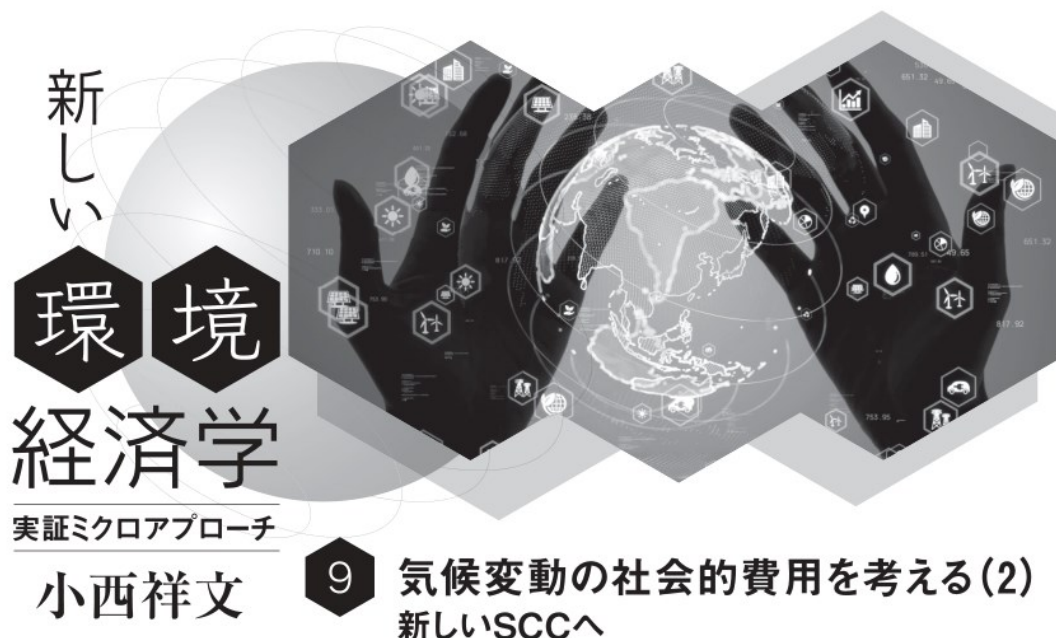


経済セミナー連載 [最終回]



## 第9回 補足ノート (2024/03/20 更新)

### 1 ラムゼイ・ルール再考

本文では不確実性が存在しない場合のラムゼイ・ルール (1) 式を用いて、将来の不確実的な消費価値を割引する際に用いるべき長期の社会的割引率 (6) 式を導出した。

$$\begin{aligned} r_t &= \rho + \sigma g_t & (1a) \\ &= \gamma_t & (1b) \end{aligned}$$

$$\exp(-\tau r_t^{ce}) = E \left[ \exp \left( - \sum_{t=1}^{\tau} r_t \right) \right] \quad (3)$$

$$r_t^{ce} = \rho - \frac{1}{\tau} \ln \left\{ E \left[ \exp \left( - \sum_{t=1}^{\tau} \sigma g_t \right) \right] \right\} \quad (6)$$

このとき、(3) 式の右辺の  $r_t$  を短期の社会的割引率として、(1) 式を直接 (3) 式に代入することで (6) 式を導出し、 $r_t^{ce}$  を長期の社会的割引率と呼ぶことで、短期の社会的割引率  $r_t$  と区別した。

一方で、(3) 式を（短期の社会的割引率ではなく）資本の利子率  $\gamma_t$  に関して成り立つものと解釈し（(1b) 式は成立しない）、不確実性下におけるラムゼイ・ルールを明示的に用いることで、同じ関係式 (6) を導出することも可能である<sup>1</sup>。

不確実性下のラムゼイ・ルールは次式のようになる。

$$r_t = \rho - \frac{1}{\tau} \ln \left\{ E \left[ \exp \left( - \sum_{t=1}^{\tau} \sigma g_t \right) \right] \right\} \quad (g_t = \ln(c_t/c_{t-1})) \quad (\text{A1})$$

一方で、資本の利子率の実現値  $\gamma_t$  に対して消費経路が最適化されていると仮定すると、異時点間の裁定条件より、次の式が成り立つ。

$$e^{-\gamma_t} = e^{-\rho} \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t-1})} = e^{-(\rho + \sigma g_t)} \quad \Rightarrow \quad \gamma_t = \rho + \sigma g_t \quad (\text{A2})$$

確実等価性割引率の定義式 (3) の右辺を  $\gamma_t$  に変更したうえで (A2) 式を代入し、 $r_t^{ce}$  について解くと、次式が得られる。

$$r_t^{ce} = \rho - \frac{1}{\tau} \ln \left\{ E \left[ \exp \left( - \sum_{t=1}^{\tau} \sigma g_t \right) \right] \right\} \quad (\text{A3})$$

ここで、(A1) と (A3) の右辺は同じであるから、 $r_t = r_t^{ce}$  となり、不確実性下のラムゼイ・ルールによって定義される社会的割引率と (3) 式で定義される確実性等価割引率が一致することがわかる。

このような考え方によれば、本文のように「短期の（不確実性のない場合の）社会的割引率」と「長期の社会的割引率」をあえて区別する必要はなく、「確実性等価割引率」と「社会的割引率」を区別する必要もなく、将来の不確実性の有無によって適用すべき社会的割引率が異なる点だけが重要ということになる。一方で、主要文献の多くは分析対象に応じてこれらの用語を明確に区別して使用しているため、その区別を理解しておくことは、文献を理解するうえで重要であろう。

---

<sup>1</sup> 以下は神戸大学の阪本浩章氏にご教示頂いた。

## 2 ラムゼイ・パラメターの推定法について

本文で紹介した Rennert et al. (2021) の新しい SCC 推定で用いられた Newell et al. (2022) によるラムゼイ・パラメターの推定法について簡単に解説しておこう。

**Step 0 均衡利子率モデルの推定**：米国の実質利子率の長期データ（1953～2019 年）を用いて、以下のような均衡利子率に関する計量モデルのパラメター（ $\phi, \sigma_u^2, \sigma_v^2$ ）を推定する。この Step では Bauer and Rudebusch (2023) の推定結果がそのまま用いられている。

$$\begin{aligned}r_t &= r_t^* + \tilde{r}_t \\r_t^* &= r_{t-1}^* + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_u^2) \\ \tilde{r}_t &= \phi \tilde{r}_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim N(0, \sigma_v^2)\end{aligned}$$

**Step 1  $r_t^{ce}$  の超長期予測データの生成**：Step 0 の推定モデルに基づき、2021～2300 年の超長期の確実等価性割引率の予測値  $\hat{r}_t^{ce}$ （期間構造データ）を生成する。ただし、2021 年の初期値  $r_{2021}^{ce}$  が必要となるため、初期値をターゲットとなる利子率（1.5～5%）を設定したうえで生成する。

**Step 2 ラムゼイ・パラメターの推定**：Step 1 で生成された  $\hat{r}_t^{ce}$  の期間構造と経済成長率予測  $g_t$  のデータを使って、以下の最適化問題を解く。

$$\min_{\rho, \sigma} \left( \hat{r}_t^{ce} - \rho + \frac{1}{\tau} \ln \left\{ E \left[ \exp \left( - \sum_{t=1}^{\tau} \sigma g_t \right) \right] \right\} \right)^2$$

このとき、 $\sigma$  は正負いずれの値もとりのうが、 $\rho$  については非負制約を入れている。加えて、直近 10 年間の平均（ $E[\rho + \sigma g_t]$ ）がターゲットとなる利子率に一致するよう制約を設けている。

### 参考文献

- Bauer, M. D. and Rudebusch, G. D. (2023) “[The Rising Cost of Climate Change: Evidence from the Bond Market](#),” *Review of Economics and Statistics*, 105(5): 1255-1270.
- Newell, R. G., Pizer, W. A. and Prest, B. C. (2022) “[A Discounting Rule for the Social Cost of Carbon](#),” *Journal of the Association of Environmental and Resource Economists*,

9(5): 1017-1046.

Rennert, K. et al. (2021) "[The Social Cost of Carbon: Advances in Long-Term Probabilistic Projections of Population, GDP, Emissions, and Discount Rates](#)," *Brookings Papers on Economic Activity*, Fall 2021: 223-275.