

補足資料：2 段階推定量の導出の詳細

最終更新：2022 年 5 月 24 日

経済セミナー連載「実証ビジネス・エコノミクス」

第 8 回「価格戦略をダイナミックに考える：

単独エージェント動学モデルの推定 [応用編]

(2022 年 6・7 月号) の付録

© 上武康亮・遠山祐太・若森直樹・渡辺安虎

1 はじめに

この補足資料では、2 段階推定量に関する導出や各種定理について詳細な説明を行う。

2 行列形式によるインバージョンの導出の詳細

本誌連載 5.1 節「行列形式によるインバージョン」の導出の詳細について説明する。ノテーションについては本誌連載を参照されたい。

まず、本誌連載 (7) 式の導出について取り上げよう。(7) 式の直前に示した事前の価値関数について、各状態変数で評価した値を以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} V(x_1) &= \sum_i P(i | x_1) \left\{ u(x_1, d) + \beta [g(x_1 | x_1, d), \dots, g(x_{|X|} | x_1, d)] \begin{bmatrix} V(x_1) \\ \vdots \\ V(x_{|X|}) \end{bmatrix} + \psi(x_1, d) \right\} \\ &\vdots \\ V(x_{|X|}) &= \sum_i P(i | x_{|X|}) \left\{ u(x_{|X|}, d) + \beta [g(1 | x_{|X|}, d), \dots, g(x_{|X|} | x_{|X|}, d)] \begin{bmatrix} V(x_1) \\ \vdots \\ V(x_{|X|}) \end{bmatrix} + \psi(x_{|X|}, d) \right\} \end{aligned}$$

この式を上からスタックする (重ね合わせる) ことで、以下の行列形式による (7) 式が得られるのであ

る (ノテーションは本誌連載参照)。

$$V = \sum_i P(i) \odot [u(i) + \beta G(i)V + \psi(i)]$$

続いて、本式を事前の価値関数のベクトル V について解いていこう。まず、

$$V - \beta \sum_i P(i) \odot [G(i)V] = \sum_i P(i) \odot [u(i) + \psi(i)]$$

この式の左辺の第 2 項についてより細かく展開する。

$$\begin{aligned} \beta \sum_i P(i) \odot [G(i)V] &= \beta \sum_i \begin{pmatrix} P(i | x_1) \\ \vdots \\ P(i | x_{|X|}) \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} g(x_1 | x_1, d) & \cdots & g(x_{|X|} | x_1, d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(1 | x_{|X|}, d) & \cdots & g(x_{|X|} | x_{|X|}, d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(x_1) \\ \vdots \\ V(x_{|X|}) \end{pmatrix} \right] \\ &= \beta \sum_i \begin{pmatrix} P(i | x_1) \\ \vdots \\ P(i | x_{|X|}) \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \sum_{x'} g(x' | x_1, i) V(x') \\ \vdots \\ \sum_{x'} g(x' | x_{|X|}, i) V(x') \end{pmatrix} \\ &= \beta \sum_i \begin{pmatrix} P(i | x_1) g(x_1 | x_1, i) & \cdots & P(i | x_1) g(x_{|X|} | x_1, i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(i | x_{|X|}) g(x_1 | x_{|X|}, i) & \cdots & P(i | x_{|X|}) g(x_{|X|} | x_{|X|}, i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(x_1) \\ \vdots \\ V(x_{|X|}) \end{pmatrix} \\ &= \beta \sum_i [(P(i) \mathbf{1}_{(1 \times |X|)}) \odot G(i)] V \end{aligned}$$

よって、

$$\left[I_{(|X| \times |X|)} - \beta \sum_i (P(i) \mathbf{1}_{(1 \times |X|)}) \odot G(i) \right] V = \sum_i P(i) \odot [u(i) + \psi(i)]$$

と書き下すことができ、この式について逆行列を取った計算を行うと、

$$V = \left[I_{(|X| \times |X|)} - \beta \sum_i (P(i) \mathbf{1}_{(1 \times |X|)}) \odot G(i) \right]^{-1} \sum_i P(i) \odot [u(i) + \psi(i)]$$

が得られる。

3 Arcidiacono and Miller (2011) の補題の証明

本節では、本誌連載 5.2 節「有限依存性アプローチ」で用いた

$$V(x) = \psi(x, i) + v(x, i), i = 0, 1$$

について導出を行う。

事前の価値関数 $V(x)$ を以下のように展開する。

$$\begin{aligned} V(x) &= \int \max_d \{v(x, d) + \epsilon(d)\} dG(\epsilon) \\ &= \int \max_d \{v(x, d) - v(x, i) + \epsilon(d)\} dG(\epsilon) + v(x, i) \end{aligned}$$

ここで選択 i は任意のもので構わない。一般のケースにおいては、

$$\psi(x, i) = \int \max_d \{v(x, d) - v(x, i) + \epsilon(d)\} dG(\epsilon)$$

と定義することで、 $V(x) = \psi(x, i) + v(x, i)$ と書くことができる。

さて、各選択枝に特有なショック項 $\epsilon(d)$ が独立かつ同一な第1種極値分布に従うケースを考えよう。このとき、 $\psi(x, i)$ はログサム公式を使うことで以下のように書き下すことができる。

$$\begin{aligned} \psi(x, i) &= \int \max_d \{v(x, d) - v(x, i) + \epsilon(d)\} dG(\epsilon) \\ &= \log \sum_d \exp(v(x, d) - v(x, i)) + \gamma \end{aligned}$$

ここで γ はオイラー定数である。

さらに、Hotz-Miller のインバージョンより、 $v(x, d) - v(x, i) = \log P(d | x) - \log P(i | x)$ と書くことができる。この式を代入すると、

$$\begin{aligned} \psi(x, i) &= \log \sum_d \exp \log \frac{P(d | x)}{P(i | x)} + \gamma \\ &= \log \sum_d \frac{P(d | x)}{P(i | x)} + \gamma \\ &= \log \frac{1}{P(i | x)} \sum_d P(d | x) + \gamma \\ &= -\log(P(i | x)) + \gamma \end{aligned}$$

と得られる。

4 Agguiregabiria and Mira (2002) で用いた等式の証明

本節では、本誌連載 5.1 節「行列形式によるインバージョン」の導出で利用した

$$\mathbb{E}[\epsilon(i) \mid i \text{ is optimal}, x] = \gamma - \log P(i \mid x)$$

という性質について導出を行う。

まず、

$$\mathbb{E}[\epsilon(i) \mid i \text{ is optimal}, x] = \mathbb{E}[\epsilon(i) \mid v(x, i) + \epsilon(i) \geq v(x, j) + \epsilon(j), \forall j]$$

として定義される。これは、選択肢 i において最も高い効用が得られることを条件づけたときの $\epsilon(i)$ に関する期待値である。

以下の導出では状態変数 x については表記を割愛する。(状態変数 x について条件づけた議論を考えてもらえば良い。) また、選択肢として i と j という 2 つがある状況を考える。^{*1} さらに、選択肢のノテーションとして下付きの文字を使う。

まず、

$$\mathbb{E}[\epsilon_i \mid v_i + \epsilon_i \geq v_j + \epsilon_j, \forall j \neq i] = \frac{1}{P(i)} \underbrace{\int \int \epsilon_i \mathbf{1}\{v_i + \epsilon_i \geq v_j + \epsilon_j, \forall j \neq i\} dG(\epsilon_i) dG(\epsilon_j)}_{\equiv A} \quad (4.1)$$

ここで、 $G(\epsilon)$ は第 1 種極値分布の分布関数である。後ほど使う密度関数 $g(\epsilon)$ と合わせて以下の記述する。

$$g(\epsilon) = \exp(-\epsilon) \exp(-\exp(-\epsilon))$$

$$G(\epsilon) = \exp(-\exp(-\epsilon))$$

である。なお、この積分は選択肢特有のショック ϵ_i, ϵ_j に関する多重積分であるが、これらは独立のショックであることに留意されたい。

上記の式の右辺の多重積分の項 A についてさらに展開すると、

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_i \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\{v_i - v_j + \epsilon_i \geq \epsilon_j\} dG(\epsilon_j) \right] dG(\epsilon_i)$$

^{*1} より一般のケースの導出については、StackExchange 'Expectation of the Maximum of iid Gumbel Variables' の記事を参照されたい。 <https://stats.stackexchange.com/questions/192424/expectation-of-the-maximum-of-iid-gumbel-variables>

となる。中の積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\{v_i - v_j + \epsilon_i \geq \epsilon_j\} dG(\epsilon_j)$ は分布関数で評価することができ、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\{v_i - v_j + \epsilon_i \geq \epsilon_j\} dG(\epsilon_j) &= G(v_i - v_j + \epsilon_i) \\ &= \exp(-\exp(-v_i + v_j - \epsilon_i)) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_i \exp(-\exp(-v_i + v_j - \epsilon_i)) \exp(-\epsilon_i) \exp(-\exp(-\epsilon_i)) d\epsilon_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_i \exp(-(1 + \exp(-v_i + v_j)) \exp(-\epsilon_i)) \exp(-\epsilon_i) d\epsilon_i \end{aligned}$$

この積分を計算するべく、いくつかのノーテーションの定義を行う。まず、 $D = 1 + \exp(-v_i + v_j)$ とする。そのうえで、以下の変数 t を用いた置換積分を行う。

$$t = D \exp(-\epsilon_i)$$

ここで、

$$dt = -D \exp(-\epsilon_i) d\epsilon_i$$

である。また、積分の範囲について考えると、 $\epsilon_i \rightarrow \infty$ のとき、 $t \rightarrow 0$ であり、 $\epsilon_i \rightarrow -\infty$ のとき、 $t \rightarrow \infty$ である。この点を踏まえて積分の計算を進めていくと

$$A = \int_{\infty}^0 (\log(D) - \log(t)) \exp(-t) \left(-\frac{1}{D}\right) dt$$

となる。さらに展開すると、

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{D} \left[\log(D) \int_0^{\infty} \exp(-t) dt - \int_0^{\infty} (\log(t) \exp(-t)) dt \right] \\ &= \frac{\log D}{D} \left(\int_0^{\infty} \exp(-t) dt \right) - \frac{1}{D} \int_0^{\infty} (\log(t) \exp(-t)) dt \end{aligned}$$

ここで、 $\int_0^{\infty} \exp(-t) dt = 1$ であり、また $-\int_0^{\infty} (\log(t) \exp(-t)) dt = \gamma$ となりこれはオイラ一定数となる。したがって、

$$A = \frac{\log D + \gamma}{D}$$

となる。

ここで、 D について書き直すと、

$$\begin{aligned} D &= 1 + \exp(-v_i + v_j) \\ &= \exp(-v_i) (\exp(v_i) + \exp(v_j)) \\ &= \frac{\exp(v_i) + \exp(v_j)}{\exp(v_i)} \\ &= \frac{1}{P(i)} \end{aligned}$$

となる。なお、今考えている設定では、選択肢 i, j の 2 つであるため、

$$P(i) = \frac{\exp(v_i)}{\exp(v_i) + \exp(v_j)}$$

となることに留意されたい。

よって、元の (4.1) 式に戻ると、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\epsilon_i \mid v_i + \epsilon_i \geq v_j + \epsilon_j, \forall j \neq i] &= \frac{1}{P(i)} \frac{\log D + \gamma}{D} \\ &= \log D + \gamma \\ &= \gamma - \log(P(i)) \end{aligned}$$

として目的のものが得られた。