『経済セミナー』2020 年 12 月・2021 年 1 月号（日本評論社刊）掲載

連載「ゼロ金利制約下の金融政策：FRB の政策運営」

第 **1** 回　理論と政策の交差点

演習問題の解答[1]

ver.1.0 (2020.11.27)

このウェブ付録では連載第 1 回の演習問題の一部について、解答と解説を提供しています。

1. [Analytical]　第 2 節で提示した基礎的な NK モデルを考えます。

(1) 非線形モデルの標準定常状態での産出量、消費、労働、実質賃金を解析的に求めてください。

解答：

$$\Pi_{ss} = 1$$

$$R_{ss} = \frac{1}{\beta}$$

$$Y_{ss} = \left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}$$

$$C_{ss} = \left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}$$

$$N_{ss} = \left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}$$

$$w_{ss} = \frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}$$

解き方：

非線形モデルが標準定常状態にあるならば、以下の条件式を満たします。

[1] Prepared by Masataka Mori and Taisuke Nakata.

$$C_{ss}^{-\chi_c} = \beta\delta_{ss}R_{ss}C_{ss}^{-\chi_c}\Pi_{ss}^{-1}$$
$$w_{ss} = N_{ss}^{\chi_n}C_{ss}^{\chi_c}$$
$$\frac{Y_{ss}}{C_{ss}^{\chi_c}}[\varphi(\Pi_{ss}-1)\Pi_{ss}-(1+\tau)(1-\theta)-\theta w_{ss}] = \beta\delta_{ss}\frac{Y_{ss}}{C_{ss}^{\chi_c}}\varphi(\Pi_{ss}-1)\Pi_{ss}$$
$$Y_{ss} = C_{ss}+\frac{\varphi}{2}[\Pi_{ss}-1]^2Y_{ss}$$
$$Y_{ss} = N_{ss}$$
$$R_{ss} = \frac{1}{\beta}\Pi_{ss}^{\Phi}$$

ここで、需要ショックの定常値は $\delta_{ss} = 1$ とおけるので、オイラー方程式を使えば

$$C_{ss}^{-\chi_c} = \beta\delta_{ss}R_{ss}C_{ss}^{-\chi_c}\Pi_{ss}^{-1}$$
$$\Rightarrow 1 = \beta R_{ss}\Pi_{ss}^{-1}$$
$$\Rightarrow R_{ss} = \frac{1}{\beta}\Pi_{ss}$$

が導き出されます。この式は、フィッシャー方程式とも呼ばれます。これとテイラールールを比較すれば、定常状態におけるインフレ率は

$$\frac{1}{\beta}\Pi_{ss}^{\Phi} = \frac{1}{\beta}\Pi_{ss}$$

を満たすので、これを整理して

$$\Rightarrow \Pi_{ss}^{\Phi-1} = 1$$
$$\Rightarrow \Pi_{ss} = 1$$

フィッシャー方程式より

$$R_{ss} = \frac{1}{\beta}1^{\Phi} = \frac{1}{\beta}$$

となります。
求まったインフレ率を価格決定に関する式に代入すると

$$\frac{Y_{ss}}{C_{ss}^{\chi_c}}[\varphi(\Pi_{ss}-1)\Pi_{ss}-(1+\tau)(1-\theta)-\theta w_{ss}] = \beta\delta_{ss}\frac{Y_{ss}}{C_{ss}^{\chi_c}}\varphi(\Pi_{ss}-1)\Pi_{ss}$$
$$-(1+\tau)(1-\theta)-\theta w_{ss} = 0$$
$$w_{ss} = \frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}$$

となり、財市場の市場均衡条件に代入すれば

$$
\mathrm{Y_{ss}} = \mathrm{C_{ss}} + \frac{\varphi}{2}[\Pi_{ss} - 1]^2 \mathrm{Y_{ss}}
$$

$$
\Rightarrow \mathrm{Y_{ss}} = \mathrm{C_{ss}}
$$

を得ます。
同時点間の最適条件より、

$$
\mathrm{N_{ss}^{\chi_n} C_{ss}^{\chi_c}} = \mathrm{w_{ss}}
$$

$$
\Rightarrow \mathrm{N_{ss}^{\chi_n+\chi_c}} = \frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}
$$

$$
\Rightarrow \mathrm{N_{ss}} = \left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}
$$

が導き出せます。

(2) 非線形モデルのデフレ定常状態での産出量、消費、労働、実質賃金を解析的に求めてください。

解答：

$$
\Pi_{ss} = \beta
$$

$$
\mathrm{R_{ss}} = 1
$$

$$
\mathrm{Y_{ss}} = \left[1 - \frac{\varphi}{2}(1-\beta)^2\right]^{\frac{\chi_n}{\chi_n+\chi_c}} \left[\frac{(1+\tau)(\theta-1) - \varphi\beta(1-\beta)^2}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}
$$

$$
\mathrm{C_{ss}} = \left[1 - \frac{\varphi}{2}(1-\beta)^2\right]^{\frac{\chi_n}{\chi_n+\chi_c}} \left[\frac{(1+\tau)(\theta-1) - \varphi\beta(1-\beta)^2}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}
$$

$$
\mathrm{N_{ss}} = \left[1 - \frac{\varphi}{2}(1-\beta)^2\right]^{\frac{\chi_n}{\chi_n+\chi_c}} \left[\frac{(1+\tau)(\theta-1) - \varphi\beta(1-\beta)^2}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}
$$

$$
\mathrm{w_{ss}} = \frac{(1+\tau)(\theta-1) - \varphi\beta(1-\beta)^2}{\theta}
$$

解き方：

非線形モデルがデフレ定常状態にあるならば、以下の条件式を満たします。

$$
\mathrm{C_{ss}^{-\chi_c}} = \beta\delta_{ss}\mathrm{R_{ss}C_{ss}^{-\chi_c}}\Pi_{ss}^{-1}
$$

$$w_{ss} = N_{ss}^{\chi_n} C_{ss}^{\chi_c}$$

$$\frac{Y_{ss}}{C_{ss}^{\chi_c}}[\varphi(\Pi_{ss}-1)\Pi_{ss}-(1+\tau)(1-\theta)-\theta w_{ss}] = \beta\delta_{ss}\frac{Y_{ss}}{C_{ss}^{\chi_c}}\varphi(\Pi_{ss}-1)\Pi_{ss}$$

$$Y_{ss} = C_{ss} + \frac{\varphi}{2}[\Pi_{ss}-1]^2 Y_{ss}$$

$$Y_{ss} = N_{ss}$$

$$R_t = R_{ELB}$$

ここで、需要ショックの定常値を$\delta_{ss}=1$、デフレ状態での政策金利を$R_{ELB}=1$とおくと、デフレ定常状態における政策金利は

$$R_t = 1$$

であるので、オイラー方程式を使えば

$$\Pi_{ss} = \beta$$

が導き出されます。
求まったインフレ率を財市場の市場均衡条件に代入すれば

$$Y_{ss} = C_{ss} + \frac{\varphi}{2}[\beta-1]^2 Y_{ss}$$

$$\Rightarrow C_{ss} = \left(1-\frac{\varphi}{2}[\beta-1]^2\right) Y_{ss}$$

となり、価格決定に関する式に代入すると

$$\frac{Y_{ss}}{C_{ss}^{\chi_c}}[\varphi(\Pi_{ss}-1)\Pi_{ss}-(1+\tau)(1-\theta)-\theta w_{ss}] = \beta\delta_{ss}\frac{Y_{ss}}{C_{ss}^{\chi_c}}\varphi(\Pi_{ss}-1)\Pi_{ss}$$

$$\Rightarrow (1-\beta)\varphi(\Pi_{ss}-1)\Pi_{ss} = (1+\tau)(1-\theta)+\theta w_{ss}$$

$$\Rightarrow w_{ss} = \frac{(1-\beta)\varphi(\Pi_{ss}-1)\Pi_{ss}-(1+\tau)(1-\theta)}{\theta}$$

$$\Rightarrow w_{ss} = \frac{(1-\beta)\varphi(\beta-1)\beta-(1+\tau)(1-\theta)}{\theta}$$

$$\Rightarrow w_{ss} = \frac{(1+\tau)(\theta-1)-\varphi\beta(1-\beta)^2}{\theta}$$

が求まります。
同時点間の最適条件より、

$$\frac{(1+\tau)(\theta-1)-\varphi\beta(1-\beta)^2}{\theta}=N_{ss}^{\chi_n}C_{ss}^{\chi_c}$$

$Y_{ss}=N_{ss}$, $C_{ss}=\left[1-\frac{\varphi}{2}(\beta-1)^2\right]Y_{ss}$ より N_{ss}, C_{ss} を削除して、

$$\frac{(1+\tau)(\theta-1)-\varphi\beta(1-\beta)^2}{\theta}=Y_{ss}^{\chi_n}\left[1-\frac{\varphi}{2}(\beta-1)^2\right]^{\chi_c}Y_{ss}^{\chi_c}$$

$$Y_{ss}^{\chi_n+\chi_c}=\left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)-\varphi\beta(1-\beta)^2}{\theta}\right]\left[1-\frac{\varphi}{2}(\beta-1)^2\right]^{-\chi_c}$$

$$Y_{ss}=\left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)-\varphi\beta(1-\beta)^2}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}\left[1-\frac{\varphi}{2}(1-\beta)^2\right]^{\frac{-\chi_c}{\chi_n+\chi_c}}$$

これより、デフレ定常状態における消費は

$$\begin{aligned}C_{ss}&=\left[1-\frac{\varphi}{2}(1-\beta)^2\right]Y_{ss}\\&=\left[1-\frac{\varphi}{2}(1-\beta)^2\right]\left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)-\varphi\beta(1-\beta)^2}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}\left[1-\frac{\varphi}{2}(1-\beta)^2\right]^{\frac{-\chi_c}{\chi_n+\chi_c}}\\&=\left[1-\frac{\varphi}{2}(1-\beta)^2\right]^{\frac{\chi_n}{\chi_n+\chi_c}}\left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)-\varphi\beta(1-\beta)^2}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}\end{aligned}$$

が導き出せます。

2. [Analytical] 上記を線形近似したモデルを考えます。

(1) 線形モデルを使って、定常状態が２つあることを解析的に示してください。

解答：

ゼロ金利外：

$$y^*=0$$
$$\pi^*=0$$
$$i^*=r^*$$

ゼロ金利下：

$$y^*=\frac{1-\beta}{\kappa}(r_{ELB}-r^*)$$

$$\Pi^* = r_{ELB} - r^*$$
$$i^* = r_{ELB}$$

解き方：
ゼロ金利外、ゼロ金利下それぞれにおいて産出量、インフレ率、名目金利が定常状態を持つことを解析的に解きます。

ゼロ金利外においてモデルは

$$y^* = y^* - \sigma[i^* - \pi^* - r^*]$$
$$\pi^* = \kappa y^* + \beta\pi^*$$
$$i^* = r^* + \phi_\pi \pi^*$$

で表されます。フィリップス曲線により、

$$\pi^* = \frac{\kappa}{1-\beta} y^*$$

テイラールールをオイラー方程式に代入して、

$$y^* = y^* - \sigma[(r^* + \phi_\pi \pi^*) - \pi^* - r^*]$$
$$0 = -\sigma[(\phi_\pi - 1)\pi^*]$$

これが σ, ϕ_π の値に関わらず成立するためには

$$\pi^* = 0$$

でなくてはなりません。

求まったインフレ率をフィリップス曲線に代入すれば

$$\frac{\kappa}{1-\beta} y^* = \pi^* = 0$$

より、

$$y^* = 0$$

また、テイラールールに代入すれば、

$$i^* = r^* + \phi_\pi \pi^* = r^*$$

と求まります。

ゼロ金利下においてモデルは

$$y^* = y^* - \sigma[i^* - \pi^* - r^*]$$
$$\pi^* = \kappa y^* + \beta\pi^*$$
$$i^* = r_{ELB}$$

で表されます。フィリップス曲線により、

$$\pi^* = \frac{\kappa}{1-\beta} y^*$$

このインフレ率とテイラールールにより求まった名目利子率をオイラー方程式に代入して、

$$y^* = y^* - \sigma\left[r_{ELB} - \frac{\kappa}{1-\beta} y^* - r^*\right]$$

$$0 = r_{ELB} - \frac{\kappa}{1-\beta} y^* - r^*$$

よって産出量は

$$y^* = \frac{1-\beta}{\kappa}(r_{ELB} - r^*)$$

と求まります。
この産出量をフィリップス曲線に代入して、

$$\pi^* = \frac{\kappa}{1-\beta} y^* = r_{ELB} - r^*$$

となります。名目利子率はゼロ金利にかかることを仮定しているので

$$i^* = r_{ELB}$$

です。

よって、定常状態が 2 つあることが示せました。

(2) 線形モデルの標準定常状態での産出量、消費、労働、実質賃金を解析的に求めてください。

解答：

(1)の問題より、標準定常状態において産出量の変化は 0 であることがわかりました。($y_t = 0$)。このとき、消費、労働、実質賃金を求めるために、線形化された条件式を利用すると、本文 75 ページの(28), (29)より、

$$\hat{C}^* = \hat{N}^* = \hat{Y}^* = 0$$

であるので、消費も労働の変化も 0 であることがわかります。これを本文 75 ページの(26)の条件式に代入して、

$$\hat{w}^* = \chi_c \hat{C}^* + \chi_n \hat{N}^* = 0$$

であることから、賃金の変化も 0 であることがわかりました。

(3) 線形モデルのデフレ定常状態での産出量、消費、労働、実質賃金を解析的に求めてください。

解答：

(2)と同様に、(1)の解答を、線形化された均衡条件に代入して消費、労働、実質賃金を求めます。

本文 75 ページの(28), (29)の条件式より

$$\hat{C}^* = \hat{N}^* = \hat{Y}^* = \frac{1-\beta}{\kappa}(r_{ELB} - r^*)$$

となります。

これらを本文 75 ページの(26)の賃金に関する条件式に代入すれば

$$\hat{w}^* = \chi_c \hat{C}^* + \chi_n \hat{N}^* = (\chi_c + \chi_n)\frac{1-\beta}{\kappa}(r_{ELB} - r^*) = \frac{(\chi_c + \chi_n)(1-\beta)(r_{ELB} - r^*)}{\kappa}$$

となります。

3. [Analytical] 第 2 節で提示した基礎的な NK モデルを考えます。

(1) 非線形モデルの標準定常状態が生産補助金 τ の値にどのように依存するのか分析してください。

解答：

問題 1 より非線形モデルの標準定常状態でのインフレ率、政策金利、産出量、消費、労働、実質賃金は

$$\Pi_{ss} = 1$$

$$R_{ss} = \frac{1}{\beta}$$

$$w_{ss} = \frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}$$

$$Y_{ss} = \left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}$$

$$C_{ss} = \left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}$$

$$N_{ss} = \left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}$$

であったので、生産補助金が増えた場合にインフレ率、政策金利の定常値は変化しないこと、産出量、消費、労働、実質賃金の定常値は増加することがわかります。

(2) 非線形モデルの標準定常状態において、代表的家計の効用が τ の値にどのように依存するのかを分析してください。

解答：

代表的家計の効用関数は

$$U_t = \frac{C_{ss}^{1-\chi_c}}{1-\chi_c} - \frac{N_{ss}^{1+\chi_n}}{1+\chi_n}$$

で表せます。ここで$C_{ss} = N_{ss}$であることを利用して、上記の定常状態での値を代入すれば

$$U_{ss} = \frac{C_{ss}^{1-\chi_c}}{1-\chi_c} - \frac{C_{ss}^{1+\chi_n}}{1+\chi_n}$$

となり、定常状態での代表的家計の効用に関して、生産補助金（τ）で微分すると、

$$\frac{\partial U_{ss}}{\partial \tau} = C_{ss}^{-\chi_c}\frac{\partial C_{ss}}{\partial \tau} - C_{ss}^{\chi_n}\frac{\partial C_{ss}}{\partial \tau}$$

となります。すなわち、 $\frac{\partial U_{ss}}{\partial \tau} > 0$ の場合に生産補助金が増えれば効用が増えることにな

り、$\frac{\partial U_{ss}}{\partial \tau} < 0$ の場合は生産補助金が増えれば効用が減ることになります。

ここで問題 3 の(1)より、τ が増え続ければC_{ss}も増え続けることがわかっているので、必ず$\frac{\partial C_{ss}}{\partial \tau} > 0$ であることを利用すれば、$\frac{\partial U_{ss}}{\partial \tau}$ を $\frac{\partial C_{ss}}{\partial \tau}$ で割ったとしても、$\frac{\partial U_{ss}}{\partial \tau}$ の正負が変化しないことがわかります。よって、$\frac{\partial U_{ss}}{\partial \tau} > 0$ になる場合は、

$$\frac{\partial U_{ss}}{\partial \tau} > 0 \;\Leftrightarrow\; C_{ss}^{-\chi_c} - C_{ss}^{\chi_n} > 0$$
$$\Leftrightarrow\; C_{ss}^{-\chi_c} > C_{ss}^{\chi_n}$$
$$\Leftrightarrow\; 1 > C_{ss}^{\chi_n+\chi_c}$$

$C_{ss} = \left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}$ を代入して、

$$\Leftrightarrow\; 1 > \frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{\theta-(\theta-1)}{\theta-1} > \tau$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{1}{\theta-1} > \tau$$

であるから、$0 < \tau < \frac{1}{\theta-1}$ならば、$\tau$ が増えるにつれて代表的家計の効用が増えることになります。

$\frac{\partial U_{ss}}{\partial \tau} < 0$ についても同様に解けば、

$$\frac{\partial U_{ss}}{\partial \tau} < 0 \;\Leftrightarrow\; C_{ss}^{-\chi_c} - C_{ss}^{\chi_n} < 0$$
$$\Leftrightarrow\; C_{ss}^{-\chi_c} < C_{ss}^{\chi_n}$$
$$\Leftrightarrow\; 1 < C_{ss}^{\chi_n+\chi_c}$$

$C_{ss} = \left[\frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}\right]^{\frac{1}{\chi_n+\chi_c}}$ を代入して、

$$\Leftrightarrow\; 1 < \frac{(1+\tau)(\theta-1)}{\theta}$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{\theta-(\theta-1)}{\theta-1} < \tau$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{1}{\theta - 1} < \tau$$

であるから、$\frac{1}{\theta-1} < \tau$ ならば、τが増えるにつれて代表的家計の効用が減ることになります。

(3) 代表的家計の効用が最大化される τ の値はいくつでしょうか。なぜその値で家計の効用が最大化されるのかを説明してください。

解答：

(2)より、$0 < \tau < \frac{1}{\theta-1}$ において τが増えるにつれて代表的家計の効用が増え、$\frac{1}{\theta-1} < \tau$ において τが増えるにつれて代表的家計の効用が減ったので、

$$\tau = \frac{1}{\theta - 1}$$

において代表的家計の効用が最大化されることがわかりました。

5. [Analytical] 負の需要ショックが１期のみだと仮定して、マイナス金利を導入する政策が産出量とインフレ率にどのような影響を与えるかを解析的に分析してください。

解答：

１期のみの線形モデルを考えれば

$$y_1 = -\sigma[i_1 - r_1^n]$$
$$\pi_1 = \kappa y_1$$
$$i_1 = r_{ELB}$$

となり、このときにゼロ金利の代わりにマイナス金利を導入すれば産出量とインフレ率にどのような影響が出るのかをもとめます。

負の需要ショックが１期に起こると仮定すると

$$\hat{\delta}_1 > 0$$

で表せるので、その期の自然利子率は下がります。

$$r_1^n = r^* - \hat{\delta}_1 < 0$$

自然利子率ショックが同じだけの大きさで起きたと仮定すると、名目金利がゼロの場合

（$r_{ZLB} = 0$）において、

$$y_{1,ZLB} = -\sigma[r_{ZLB} - r_1^n]$$
$$\pi_{1,ZLB} = \kappa y_{1,ZLB}$$

マイナスの場合（$r_{NEGLB} < 0$）において、

$$y_{1,NEGLB} = -\sigma[r_{NEGLB} - r_1^n]$$
$$\pi_{1,NEGLB} = \kappa y_{1,NEGLB}$$

を満たします。

産出量の値を比較すれば、

$$y_{1,NEGLB} - y_{1,ZLB} = -\sigma[r_{NEGLB} - r_1^n] + \sigma[r_{ZLB} - r_1^n] = -\sigma[r_{NEGLB} - r_{ZLB}] = -\sigma r_{NEGLB} > 0$$

であるので、マイナス金利の場合において産出量が多くなることがわかります。

また、フィリップス曲線に産出量の値を代入すれば、

$$\pi_{1,NEGLB} - \pi_{1,ZLB} = \kappa y_{1,NEGLB} - \kappa y_{1,ZLB} = \kappa\left(y_{1,NEGLB} - y_{1,ZLB}\right) = \kappa(-\sigma r_{NEGLB}) > 0$$

であるので、マイナス金利の場合においてインフレ率が高くなることがわかります。