Ａ：９月号　問１

■解答

（１）縦 $2\times$ 横 x の場合のペン軸の中心の移動距離 d の最小値は

$$d = x - 0.480114762245200208508989157425259611195l\cdots$$

（２）縦 $(2+\varepsilon)\times$ 横 x の場合のペン軸の中心の移動距離 d の最小値は

$$\begin{aligned} d = x &- 0.48011476224520020850898915742525961119 51\cdots \\ &+\left(x - 0.6327918373330886104141204206643l4\right)\varepsilon \\ &+\left(-1.5x + 1.6871640897724284\right)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

こっちの形がいいのかも知れない.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{1+4\varepsilon+\varepsilon^2}(x-2) \\ &+2\times 0.7599426188773998957455054212873701944024498881637\cdots \\ &+2\times 1.3163959186665443052070602103321576851725243455683\varepsilon \\ &-2\times 0.6564179551137858389085451928853676103238614535835\varepsilon^2 \\ &+2\times 2.0804208568001207442764\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \end{aligned}$$

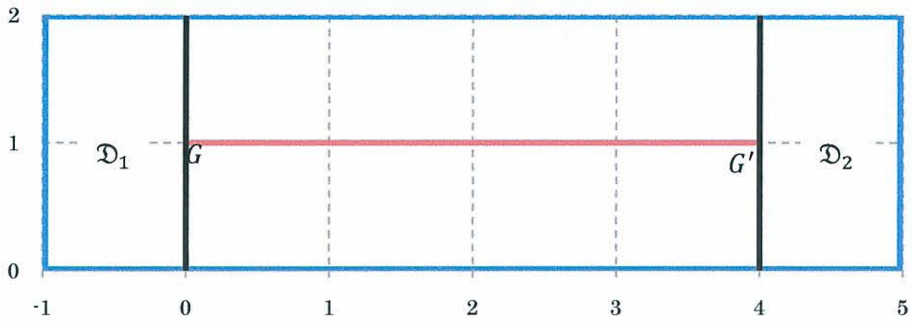
超多倍長で数値を求めた理由のひとつに、連分数展開などで、分数やルートの混じった式の場合、ある程度復元可能だからです．ただし、今回はダメでした.

21ページ以降に、縦 $2\times$ 横 $x(\leq 2)$ の場合を、発展として、扱っています.

A：９月号　問１

（１）縦 2× 横 x の場合

左右両側の横幅１を除く中央部の領域の中では、ペンの中心は、下図の赤線部分 GG' を横に進めば最短となる．（下の図は、縦２×横６の矩形の例）



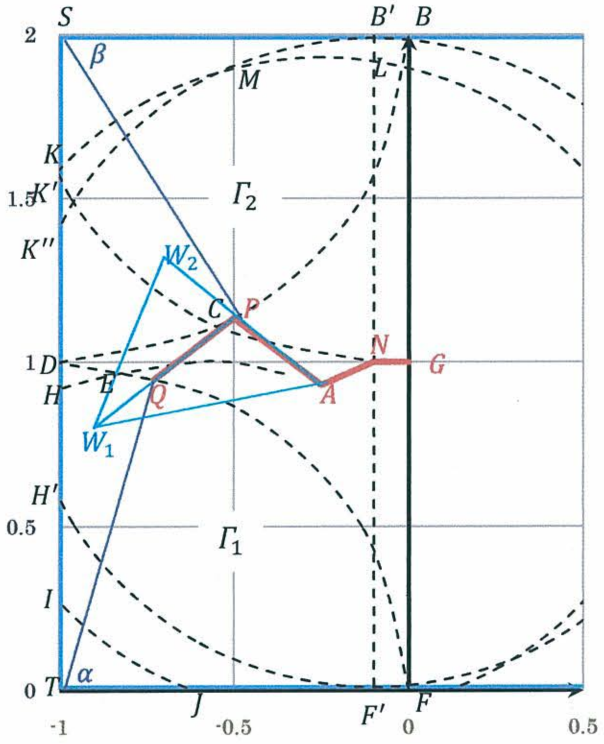
そこで、上図の領域 $\mathfrak{D}_1$、$\mathfrak{D}_2$ での最短距離を追究する．対称性から、$\mathfrak{D}_1$ での最短距離が分かれば良い．

そこで、次ページの図となる．この図は、領域 $\mathfrak{D}_1$ の拡大図で、その中に、検討したペン先の移動経路を「赤線」で描いている．

次ページの図の中の点線の曲線は、半径 1 の円弧の一部を表している．太ペンの中心は $G \to N \to A \to P \to Q$ と進むと想定している．

この経路に到達するまで、試行錯誤がありました．最初は、$G \to N \to P \to Q$ を考え、次に $G \to A \to P \to Q$ の方が有利と気づき、さらに合わせ技のこの経路を発見しました．いずれも、次問の縦長$= 2 + \varepsilon$ の場合を求めているときに「！」となり、この問題に２度戻りました．（解答は、ほんの氷山の一角）

A：９月号　問１



N の座標を $\begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix}$、$A$ の座標を $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とする．$-1 < w \leq 0$、$-1 < x \leq w$、$0 \leq y \leq 1$ で考えて一般性は失われない．

（注意）x は、本来、矩形の横長を表す変数だが、しばらくの間は上の使い方をする．

ペンの中心が G から N まで動いたとする．太ペンの中心が N のとき、N を中心に半径 1 の円弧を描くと、弧$B'K''$と弧$H'F'$ が描かれ、この時点で塗られない領域は、この円の外側の、$B'K''S$ と $H'F'T$ なっている．

A：９月号　問１

ペンの中心が A のとき、A を中心に半径 1 の円弧を描くと、弧IJ と弧KL が描かれ、この時点で塗られていない領域は $B'MKS$ と ITJ となる.

ITJ の領域を塗りつぶす場合、太ペンの中心が存在すべき領域は、T を中心とする半径 1 の円弧 DEF と、J を中心とする半径 1 の円弧 HE とで囲まれた領域$HEFT$ にペンの中心が存在すれば良い. この境界線上を含む閉領域を Γ_1 と書くことにする.

さらに、領域は $B'MKS$ を塗りつぶす場合に、太ペンの中心が存在すべき領域は、B' を中心とする半径 1 の円弧 $K'CN$ と、S を中心とする半径 1 の円弧 BCD とで囲まれた領域 $BCK'S$ にペンの中心が存在すれば良い. この境界線上を含む閉領域を Γ_2 と書くことにする.

ペンの中心が A にあるとする. A、点$W_2 \in \Gamma_2$、点$W_1 \in \Gamma_1$ を順に結んだとき、長さがなるべく短くなるような線を考える.

ここで$\triangle AW_2W_1$ を考える. 線分AW_2 と弧BCDの交点を P とすると

$$\overline{AW_2} + \overline{W_2W_1} \geq \overline{AP} + \overline{PW_1}$$

が成り立つ.

線分 PW_1 と弧DEF との交点を Q とすると

$$\overline{AP} + \overline{PW_1} \geq \overline{AP} + \overline{PQ}$$

よって、境界線の円弧上の点 P、Q に対して、折線 $GNAPQ$ の長さが最小となる場合を考えれば良い.

A：９月号　問１

P の座標については、$\angle BSP = \beta$ として、$\begin{bmatrix} -1+\cos\beta \\ 2-\sin\beta \end{bmatrix}$

Q の座標については、$\angle FTQ = \alpha$ として、$\begin{bmatrix} -1+\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$

N の座標を $\begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix}$ とすると、$B' \begin{bmatrix} w \\ 2 \end{bmatrix}$ となる.

A の座標が $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ で、$AJ = 1$ なので、J の x 座標は $x - \sqrt{1-y^2}$

したがって、J の座標は $\begin{bmatrix} x-\sqrt{1-y^2} \\ 0 \end{bmatrix}$

$ET = EJ = 1$ より、E の x 座標は

$$E_x = \frac{1}{2}\left(-1 + x - \sqrt{1-y^2}\right)$$

となり、Q は E の右側にあるので

$$\cos\alpha \geq 1 + E_x = \frac{1}{2}\left(1 + x - \sqrt{1-y^2}\right)$$

上の等式の場合を満たす α を α_m とすると、α の変域は次のようになる.

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_m$$

$CB' = CS = 1$ より、C の x 座標は

$$C_x = \frac{1}{2}(w-1)$$

P は C の右側にあるので

$$\cos\beta \geq 1 + C_x = \frac{1}{2}(w+1)$$

上の等式の場合を満たす β を β_m とすると、β の変域は次のようになる.

$$0 \leq \beta \leq \beta_m$$

A：9月号　問1

折れ線 $GNAPQ$ の長さを z とすると

$$z = GN + NA + AP + PQ$$

$$GN = -w > 0$$

$$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - w \\ y - 1 \end{bmatrix}$$

$$NA = \sqrt{(x-w)^2 + (y-1)^2}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -1 + \cos\beta \\ 2 - \sin\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \cos\beta - x \\ 2 - \sin\beta - y \end{bmatrix}$$

$$AP = \sqrt{(-1 + \cos\beta - x)^2 + (2 - \sin\beta - y)^2}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} -1 + \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 + \cos\beta \\ 2 - \sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha - \cos\beta \\ \sin\alpha + \sin\beta - 2 \end{bmatrix}$$

$$PQ = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta - 2)^2}$$

z を最小とする、w, x, y, α, β を考えよう.

コンピュータ使用するのだが、その際、アルゴリズムを検討する.

w が定まると、点 C が定まり、この点は β の変域にかかわっている.
x, y が定まると、点 E が定まり. この点は α の変域にかかわっている.

そこで、まず w, x, y を定め、α, β を動かして、z が最小となる場合を探すことにする.

$w \to x \to y \to \alpha$ の順に定めた場合、Q の位置が定まり、x, y の２変数から α の最大値 α_m も求まっている. 最後に定めたい P は β の制限により C よりも下方に来ることはできないことを強調しておく.

A：９月号　問１

この状態で P の具体的な位置について、物理的に表現すると、フェルマの原理（フェルマの定理ではなく、物理光学の基本原理を指す）より、弧BCD を凸筒面鏡と見立てて、A から鏡面を眺めたとき、この鏡面に映った Q の像 Q' と A を結ぶ線分と、弧BCDとの交点が、求める P の「候補」となる．

これを言い換えるなら、Q から凸面鏡上の点 P への入射角と、P から A に向かう反射角が等しくなっている．

入射角・反射角について数学的に表現すると、次のようになる．まず、弧BCD は点 S を中心とする円の一部なので、半直線SP 上の点 R を、P から見て S の反対側に取って

$\angle QPR =$入射角、$\angle APR =$反射角

先に、P の「候補」とした理由は、P の候補が点 C よりも上方にあれば、点 P は正（まさ）しく、z を最小にする P の位置となるからで、もし P の候補が点 C よりも下方にあれば、実際の P は C 点に一致する．

もっとも、$\angle QPR = \angle APR$ を利用するということは、z を β で変分（物理的には変分、数学的には偏微分）してゼロに等しいとしていることになる．

こうして、w, x, y を動かして（ こういう問題では経験上、刻みは $dx = dw > dy$ が良い）それぞれの立体格子点での z の最小値を求めていくと、全体として z が最小となる点 A のおよその領域が求まる．そして、全体として z が最小となる領域では、$P = C$、$Q = E$ となっていた．

そこで、今度は、$P = C$、$Q = E$ と定め、w, x, y の３変数の函数 $z(w, x, y)$ とし、z の極値の候補を調べるため、$\dfrac{\partial z}{\partial w} = 0$、$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$、$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ を解くことにする．

コンピュータ使用する際、z の２階偏微分係数も $Jacobian$ の要素として扱うことになるので、２階偏微分を利用して、極小を確認できる．

Ａ：９月号　問１

こうして出てきたのが

$$z = 0.759942618877399895745505421287\cdots$$

$$w = -0.073835505833947465592860632092\cdots$$

$$x = -0.120386397422834162745293880006\cdots$$

$$y = \ 0.995739902619080444663523291394\cdots$$

以上より、z の最小値は

$$z = 0.759942618877399895745505421287\cdots$$

したがって、縦 $2\times$ 横 x （ここから、x は問題文での定義に戻る）の場合のペン軸の中心の移動距離 d の最小値は

$$\begin{aligned} d &= x - 2 + 2z \\ &= x - 0.480114762245200208508989157425\cdots \end{aligned}$$

□

■（１）のコメント

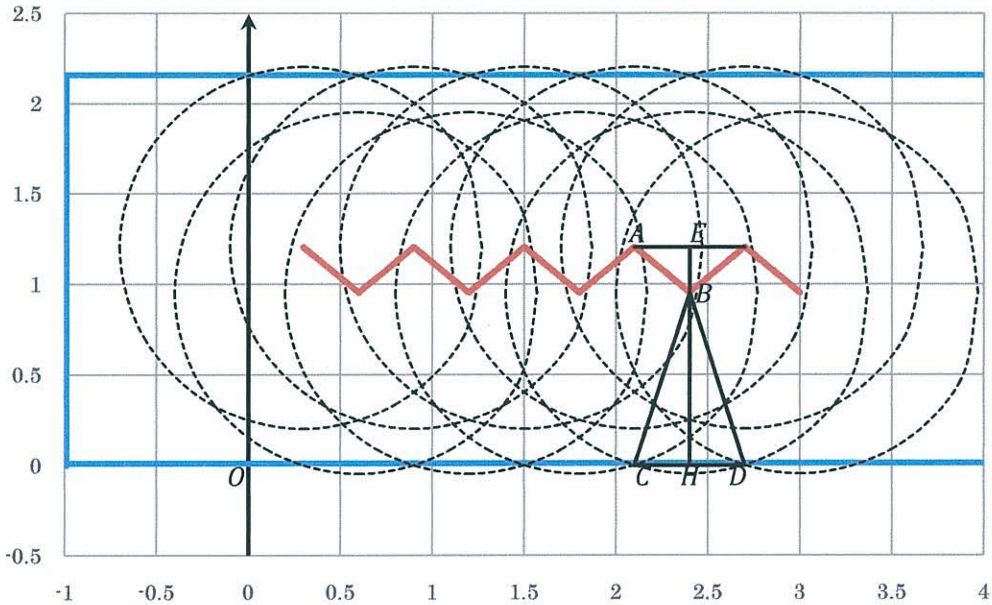
問題の内容は単純で、理解するのは容易なのですが、実際、こんなにややこしいとは思いませんでした.

結構、楽しめました.

A：９月号　問１

（２）縦 $(2+\varepsilon)\times$ 横 x の矩形の場合

とりあえず、ジグザグにペンを進めることにします．　横長 x の定義はしばらくの間は使用せず、x 座標に変えて議論し、最後に元に戻します．



まず、端の状態は考慮せず、筆の中心は、始点と終点を考えたとき、横方向に限れば ℓ だけ進んでいたと仮定して話を進めます．

上の図で、赤の折線がペンの中心の移動の様子で、この折線の端点と折点から半径 1 の円を点線で描いています．なお、記号を上のように定めておきます．

A：９月号　問１

図で $CH = w$ とする．ΔBCD は、$BC = BD = 1$ の二等辺三角形なので

$$BH = \sqrt{1 - w^2}$$

$$BE = 2 + \varepsilon - 2\sqrt{1 - w^2}$$

$$AB = \sqrt{w^2 + \left(2 + \varepsilon - 2\sqrt{1 - w^2}\right)^2}$$

ここで、$\ell = nw$ とすると、ペンの中心が実際に進んだ距離 d は

$$d = nAB = n\sqrt{w^2 + \left(2 + \varepsilon - 2\sqrt{1 - w^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\ell}{w}\sqrt{w^2 + \left(2 + \varepsilon - 2\sqrt{1 - w^2}\right)^2}$$

ℓ を固定したとき、上の d を最小化する w の値 w_m と、d の最小値 d_m を求めたい．

両辺を２乗して

$$d^2 = \left(\frac{\ell}{w}\right)^2 \left\{w^2 + \left(2 + \varepsilon - 2\sqrt{1 - w^2}\right)^2\right\}$$

$$= \ell^2 \left\{-3 + \{4 + (2 + \varepsilon)^2\}\frac{1}{w^2} - 4(2 + \varepsilon)\frac{1}{w^2}\sqrt{1 - w^2}\right\}$$

ここで、$f(w) = -3 + \{4 + (2 + \varepsilon)^2\}\frac{1}{w^2} - 4(2 + \varepsilon)\frac{1}{w^2}\sqrt{1 - w^2}$ と定義して、この関数値の増減を調べることにする．

$$f'(w) = -2\{4 + (2 + \varepsilon)^2\}\frac{1}{w^3} + 8(2 + \varepsilon)\frac{1}{w^3}\sqrt{1 - w^2}$$

$$-4 \cdot \frac{1}{2}(2 + \varepsilon)\frac{1}{w^2}(1 - w^2)^{-1/2}(-2w)$$

A：９月号　問１

$f'(w) = 0$ のとき

$$-2\{4+(2+\varepsilon)^2\} + 8(2+\varepsilon)\sqrt{1-w^2} + 4(2+\varepsilon)w^2(1-w^2)^{-1/2} = 0$$

$$-2\{4+(2+\varepsilon)^2\}\sqrt{1-w^2} + 8(2+\varepsilon)(1-w^2) + 4(2+\varepsilon)w^2 = 0$$

$$\begin{aligned}\{4+(2+\varepsilon)^2\}\sqrt{1-w^2} &= 4(2+\varepsilon)(1-w^2) + 2(2+\varepsilon)w^2 \\ &= 2(2+\varepsilon)(2-w^2)\end{aligned}$$

両辺は正なので、ともに二乗して

$$\{4+(2+\varepsilon)^2\}^2(1-w^2) = 4(2+\varepsilon)^2(2-w^2)^2$$

$$4(2+\varepsilon)^2w^4 + (16\varepsilon^2+8\varepsilon^3+\varepsilon^4)w^2 - (16\varepsilon^2+8\varepsilon^3+\varepsilon^4) = 0$$

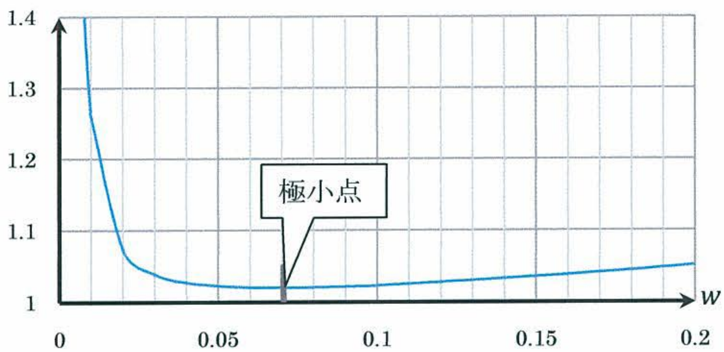
これは因数分解できて

$$\{(2+\varepsilon)^2w^2 - 4\varepsilon - \varepsilon^2\}(4w^2+4\varepsilon+\varepsilon^2) = 0$$

$w^2 > 0$ より

$$w^2 = \frac{4\varepsilon+\varepsilon^2}{(2+\varepsilon)^2} \quad \text{よって} \quad w = \frac{1}{2+\varepsilon}\sqrt{4\varepsilon+\varepsilon^2} \equiv w_m$$

下図は、$\varepsilon = 0.005$ の場合の $f(w)$ のグラフである．



$w = w_m$ のとき、f は最小となると分かる．

A：９月号　問１

そこで、f の最小値を求める.

$$f(w_m) = -3 + \{4 + (2+\varepsilon)^2\}\frac{(2+\varepsilon)^2}{4\varepsilon+\varepsilon^2} - 4(2+\varepsilon)\frac{(2+\varepsilon)^2}{4\varepsilon+\varepsilon^2}\sqrt{1-\frac{4\varepsilon+\varepsilon^2}{(2+\varepsilon)^2}}$$

$$= -3 + \{4 + (2+\varepsilon)^2\}\frac{(2+\varepsilon)^2}{4\varepsilon+\varepsilon^2} - 4(2+\varepsilon)\frac{(2+\varepsilon)^2}{4\varepsilon+\varepsilon^2}\frac{2}{2+\varepsilon}$$

$$= -3 + \{4 + (2+\varepsilon)^2\}\frac{(2+\varepsilon)^2}{4\varepsilon+\varepsilon^2} - 8\frac{(2+\varepsilon)^2}{4\varepsilon+\varepsilon^2}$$

$$(4\varepsilon+\varepsilon^2)\,f(w_m) = -3(4\varepsilon+\varepsilon^2) + \{4+(2+\varepsilon)^2\}(2+\varepsilon)^2 - 8(2+\varepsilon)^2$$

$$= (4\varepsilon+\varepsilon^2)\{(2+\varepsilon)^2 - 3\}$$

$\varepsilon > 0$ より

$$f(w_m) = (2+\varepsilon)^2 - 3 = 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 3 = 1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2$$

したがって、d の最小値 d_m は

$$d_m{}^2 = \ell^2(1+4\varepsilon+\varepsilon^2)$$

$$d_m = \ell\sqrt{1+4\varepsilon+\varepsilon^2}$$

まとめると、$w = w_m = \frac{1}{2+\varepsilon}\sqrt{4\varepsilon+\varepsilon^2}$ のとき、d は最小になり、最小値は

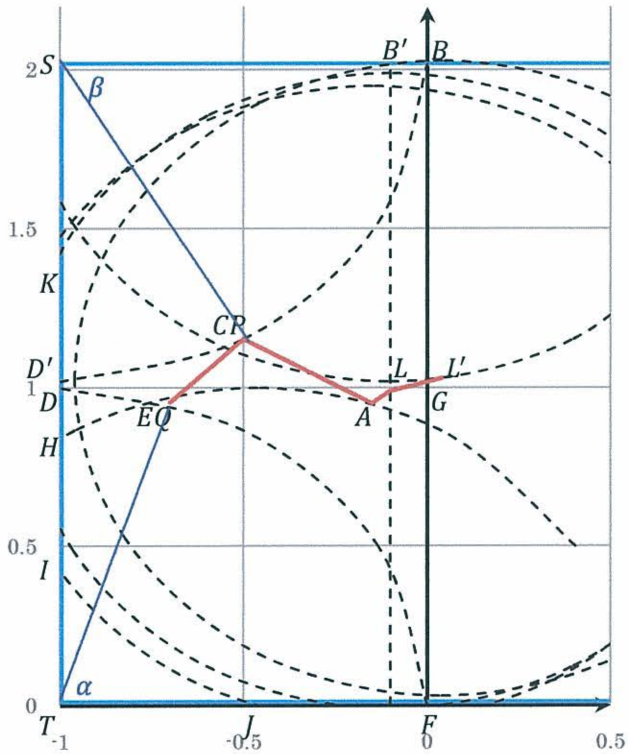
$$d_m = \ell\sqrt{1+4\varepsilon+\varepsilon^2}$$

このまま、$\varepsilon \to +0$ とすると、$d_m \to \ell$ となり、縦が 2 の場合と $2+\varepsilon > 2$ の場合の間で、質的な変化は起きないと分かる.

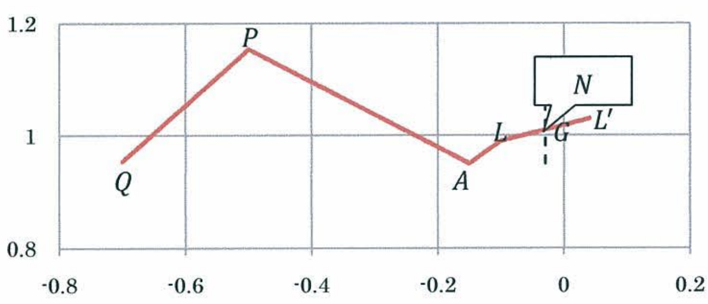
$d = d_m$ のときの他の値を求めておく.

$$CH = \frac{1}{2+\varepsilon}\sqrt{4\varepsilon+\varepsilon^2}、BH = \frac{2}{2+\varepsilon}、BE = \frac{\varepsilon(4+\varepsilon)}{2+\varepsilon}、AB = \frac{\sqrt{\varepsilon(4+\varepsilon)(1+4\varepsilon+\varepsilon^2)}}{2+\varepsilon}$$

A：９月号　問１



折れ線部分の拡大図



A：9月号　問1

次に、端の状態を考える．前ページの図の青線は、塗るべき矩形の左端の部分で、赤線がペンの中心の移動軌跡である．

この図で、$L'L$ の部分は、先に計算したジグザグ軌道の一部であり．G は、このジグザグ軌道が y 軸と交わる点である．$L'L$ の中点を N とする．ここで注目する折れ線軌道は $G \to L \to A \to P \to Q$ であり、端付近でのペンの中心の移動で、この長さを最小にしたい．　その下には、折れ線部分の拡大図を示した．

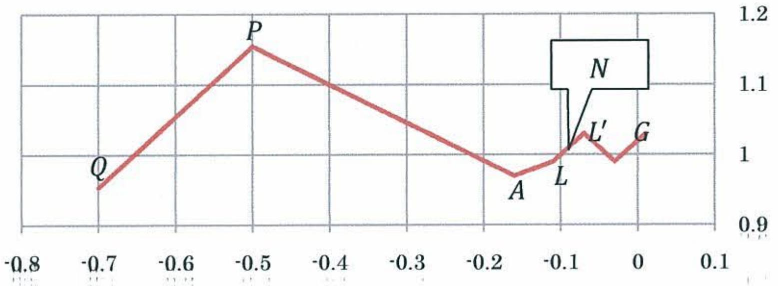
N の位置を $\begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．（ N は端の折れ線の平均的位置 ）

記号が、今回の図とジグザグ軌道の図とダブルので、５ページ前のジグザグ軌道の図のときの記号は、$\langle\cdots\rangle$ のように括弧で囲むことにする．具体的には

$$\langle CH \rangle = \frac{1}{2+\varepsilon}\sqrt{4\varepsilon + \varepsilon^2}$$

のように記述する．

追加説明で、もしジグザグ軌道が、左端領域にかなり入り込む場合、下図のよ



うに、記号を取ります．$G \to L$ の長さとは、上のような折線上の長さを意味します．そこで、後述のように、$\{GL\}$ という記法を導入しました．

Ａ：９月号　問１

L' を中心に半径 1 の円を描くと、L 点の真上の B' を通る.

B' を中心に半径 1 の円弧を描き、S を中心とする半径 1 の円弧 BD' との交点を C とする.

弧 IJ は A を中心とする半径 1 の円弧である.

J を中心に半径 1 の円弧を描き、T を中心とする半径 1 の円弧 DF との交点を E とする.

前問で議論したように、弧 EF 上に点 Q を考え、弧 BC 上に点 P を考え、$z = \{GL\} + LA + AP + PQ$ を最小化したい.

$\{GL\}$ の意味は、GL の間だけジグザグ移動するので、GL の間の x 方向の座標の差の大きさに $\sqrt{1+4\varepsilon+\varepsilon^2}$ を掛けた値である.

L の位置は ε に依存する定点であり、$L_x = w - \frac{1}{2}\langle CH\rangle$、$L_y = \langle BH\rangle$ なので

$$L\begin{bmatrix} w - \frac{1}{2(2+\varepsilon)}\sqrt{(4+\varepsilon)\varepsilon} \\ \frac{2}{2+\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$\{GL\}$ は、$\{GL\} = \sqrt{1+4\varepsilon+\varepsilon^2}\left(-w + \frac{1}{2(2+\varepsilon)}\sqrt{(4+\varepsilon)\varepsilon}\right)$

P の座標は、$\angle BSP = \beta$ として、$\begin{bmatrix} -1+\cos\beta \\ 2+\varepsilon-\sin\beta \end{bmatrix}$

Q の座標は、$\angle FTQ = \alpha$ として、$\begin{bmatrix} -1+\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$

A の座標を $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると、$AJ = 1$ なので、J の x 座標は $x - \sqrt{1-y^2}$

したがって、J の座標は $\begin{bmatrix} x - \sqrt{1-y^2} \\ 0 \end{bmatrix}$

Ａ：９月号　問１

$ET = EJ = 1$ より、E の x 座標は

$$E_x = \frac{1}{2}\left(-1 + x - \sqrt{1 - y^2}\right)$$

となる．Q は E の右側にあるので

$$-1 + cos\,\alpha \geq E_x = \frac{1}{2}\left(-1 + x - \sqrt{1 - y^2}\right)$$

$$cos\,\alpha \geq \frac{1}{2}\left(1 + x - \sqrt{1 - y^2}\right)$$

上の等式の場合を満たす α を α_m とすると、α の変域は次のようになる．

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_m$$

次に、B' は L 点の真上にあるので、$B'\begin{bmatrix} w - \frac{1}{2(2+\varepsilon)}\sqrt{(4+\varepsilon)\varepsilon} \\ 2+\varepsilon \end{bmatrix}$

$CB' = CS = 1$ が成り立つので、C の x 座標は次の通り．

$$C_x = \frac{1}{2}\left(-1 + w - \frac{1}{2(2+\varepsilon)}\sqrt{(4+\varepsilon)\varepsilon}\right)$$

P は C の右側にあるので、

$$-1 + cos\,\beta \geq \frac{1}{2}\left(-1 + w - \frac{1}{2(2+\varepsilon)}\sqrt{(4+\varepsilon)\varepsilon}\right)$$

$$cos\,\beta \geq \frac{1}{2}\left(1 + w - \frac{1}{2(2+\varepsilon)}\sqrt{(4+\varepsilon)\varepsilon}\right)$$

上の等式の場合を満たす β を β_m とすると、β の変域は次のようになる．

$$0 \leq \beta \leq \beta_m$$

折れ線 $GLAPQ$ の長さを z とすると

$$z = \{GL\} + LA + AP + PQ$$

A：９月号　問１

そして

$$\{GL\} = \sqrt{1+4\varepsilon+\varepsilon^2}\left(-w+\frac{1}{2(2+\varepsilon)}\sqrt{(4+\varepsilon)\varepsilon}\right)$$

$$\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OL} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w - \frac{1}{2(2+\varepsilon)}\sqrt{(4+\varepsilon)\varepsilon} \\ \frac{2}{2+\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - w + \frac{1}{2(2+\varepsilon)}\sqrt{(4+\varepsilon)\varepsilon} \\ y - \frac{2}{2+\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -1+\cos\beta \\ 2+\varepsilon-\sin\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\cos\beta - x \\ 2+\varepsilon-\sin\beta - y \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} -1+\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1+\cos\beta \\ 2+\varepsilon-\sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha - \cos\beta \\ \sin\alpha + \sin\beta - 2 - \varepsilon \end{bmatrix}$$

したがって

$$LA = \sqrt{\left(x - w + \frac{1}{2(2+\varepsilon)}\sqrt{(4+\varepsilon)\varepsilon}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{2+\varepsilon}\right)^2}$$

$$AP = \sqrt{(-1+\cos\beta - x)^2 + (2+\varepsilon-\sin\beta-y)^2}$$
$$PQ = \sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\sin\alpha+\sin\beta-2-\varepsilon)^2}$$

$$z = \{GL\} + LA + AP + PQ$$

z を最小とする、w, x, y, α, β を考える.

w, x, y が定まると、点 C, E が定まる. この点は α, β の変域にかかわっている.
そこで、最初に w, x, y を定め、α, β を動かして、z が最小となる場合を探すことにする. まず　$x < L_x$、$y < L_y$ として問題はない.

A：９月号　問１

ここから、コンピュータを利用するのだが、（１）と同様のアルゴリズム的工夫をした．実際に、$\varepsilon \leq 0.01$ で調べると、z が最小となるとき、$\alpha = \alpha_m$、$\beta = \beta_m$ となり（１）の場合と状況が似ていると分かった．

コンピュータによる計算の結果、この問題の最小値 z_m と、その値から（１）での z の最小値 z_o を引いた値の一部を表にすると、次のようになる．

$z_o = 0.759942618877399895745505421287\cdots$

ε	$z_m - z_o$	z_m
0.01	0.0131004823674826112760823233552	0.7730431012448825070215877446426
0.001	0.0013157415894195897892550578266	0.7612583604668194855347604791140
0.0001	0.0001316330297683517511626428142	0.7600742519071682474966680641016
1×10^{-5}	0.0000131638935469504352797056356	0.7599557827709468461807851269230
1×10^{-6}	0.0000013163952622506696205528563	0.7599439352726621464151259741437
1×10^{-7}	0.0000001316395853024769598045319	0.7599427505169851982224652258193
1×10^{-8}	0.0000000131639591210236496211129	0.7599426320413590167691550424003
1×10^{-9}	0.0000000013163959180101263521737	0.7599426201937958137556317734611
1×10^{-10}	0.0000000001316395918600902509716	0.7599426190090394876055956722590
1×10^{-11}	0.0000000000131639591865998012565	0.7599426188905638549321052225439
1×10^{-12}	0.0000000000013163959186658878872	0.7599426188787162916641713091746
1×10^{-13}	0.0000000000001316395918666478663	0.7599426188775315353373720691537
1×10^{-14}	0.0000000000000131639591866653774	0.7599426188774130597046920866648
1×10^{-15}	0.0000000000000013163959186665436	0.7599426188774012121414240878310

A：９月号　問１

（*break time*）

実を言うと、ここでの計算は３回目です．前２回は、z の最小値を求めると、$\varepsilon \to +0$ に対して、最初は減っているが、途中から増加に転じてしまいました．これは、感覚的に変です．

１回目は、A 点を考慮しないまま（ $A = L$ に相当する）計算し、２回目は N 点を考慮しないまま（ $N = G$ に相当する）計算したことになり、「今」になって原因が分かります．

ここまで２回ほど到達し、いずれも（１）に戻って、やりなおしていますが、３回目は、うまくいきました．

端の部分での長さの最小値を ε 依存を含めて評価すると（コンピュータの腕力で、ε^3 の寄与程度は出せます．もはやエレガントではないなぁ）

$$
\begin{aligned}
z_m = 0.&7599426188773998957455054212873701944024498881637\cdots \\
&+1.3163959186665443052070602103321576851725243455683\varepsilon \\
&-0.65641795511378583890854519288536761032386145358 35\varepsilon^2 \\
&+2.0804208568001207442764\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)
\end{aligned}
$$

横辺長 x に対して

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{1+4\varepsilon+\varepsilon^2}(x-2) + 2z_m \\
&= \left(1+\varepsilon-\frac{3}{2}\varepsilon^2\right)(x-2) + 2\times 0.7599426188773998957455054212 87 \\
&\qquad +2\times 1.3163959186665443052070602103321 57\varepsilon \\
&\qquad -2\times 0.6564179551137858889085451928853676\varepsilon^2 \\
&\qquad +2\times 2.0804208568001207442764\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)
\end{aligned}
$$

□

A：９月号　問１

この表現もある.

$$
\begin{aligned}
d = x &- 0.48011476224520020850898915742525961119510022367253 \\
&+\left(x - 0.63279183733308861041412042066 4314\right)\varepsilon \\
&+\left(-1.5x + 1.6871640897724284\right)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
$$

■（２）のコメント

とりあえず、もっともらしい解を出せました. ルートなどが付いた明快な表現が可能な解になると推測していたのですが、思い切り外れてしまいました.

締切までに時間的余裕があったので、夏休みの終盤に、次の「発展」を楽しむことにします.

おそらく、この問題は、いわゆる正解が確定していないタイプと思います.

したがって、今回の問題は、非常に面白いです.（証明問題などは「どうせ誰か他人が既におこなっているだろな」と思うと、ちょっと興味が薄れます）

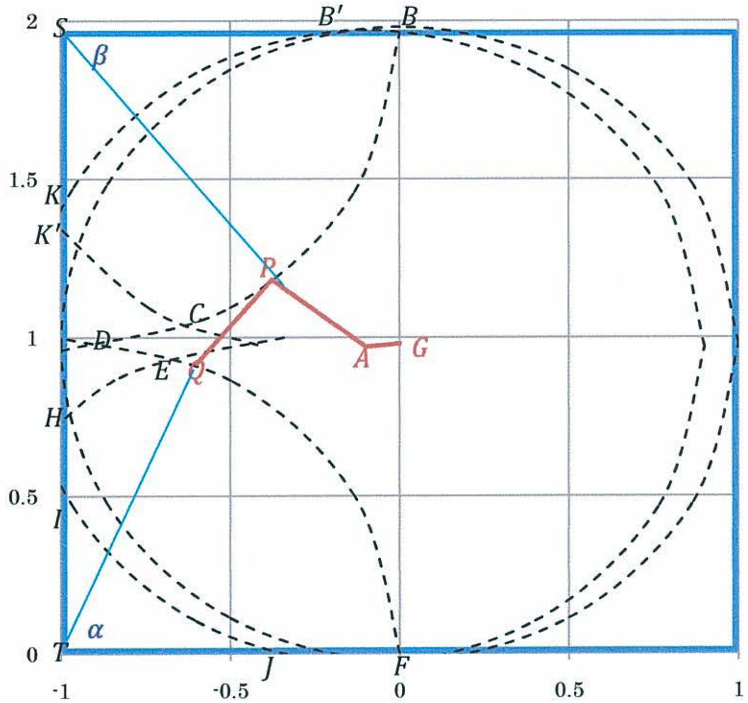
A：9月号　問1

■発展問題　発展として、縦 2 で、横 x で、$0 < x \leq 2$ の場合を考えます.

記号 x は、今までと同様、途中、横長として使わず、代わりにここでは横長を $2s$ とする. 最後に $x = 2s$ と戻す予定です.

さらに、前問の解法と比較して、共通点を多くしたいので、図中では矩形を 90° 回転させて、横= 2、縦= $2s$ で説明します. また、座標の取り方も変えて、矩形の中心が $G\begin{bmatrix}0\\s\end{bmatrix}$ になるようにしました.

下の図は②で考慮した経路を示しています.



A：９月号　問１

①　$G \to N \to A \to P \to Q$ の場合

$s_1 = 0.9975\cdots \le s \le 1$ の範囲で適用できます.

正確には　$s_1 = 0.99752226737979011216723331811594177913707 3$

下図は $s = 0.9995$ のときの最短軌跡です.

$s \to 1-0$ とすると、（１）の解答に「収束」します.

$z = 0.75994261887739989574550542128 7\cdots$

$w = -0.07383550583394746559286063209 2\cdots$

$x = -0.12038639742283416274529388000 6\cdots$

$y = \ 0.99573990261908044466352329139 4\cdots$

数値の意味は $N\begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix}$、$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ で、z は半領域での最短距離です.

ここでの、具体的な解き方は、（１）に準拠していて、次の通り.

$G\begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}$、$N\begin{bmatrix} w \\ s \end{bmatrix}$、$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とする. ただし $w \le 0$、$x \le w$ で考える.

A：９月号　問１

P の座標については、$\angle BSP=\beta$ として、$\begin{bmatrix} -1+\cos\beta \\ 2s-\sin\beta \end{bmatrix}$ とする.

Q の座標については、$\angle FTQ=\alpha$ として、$\begin{bmatrix} -1+\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$ とする.

考慮すべき α,β の変域は次の通り.

$$0\le\alpha\le\alpha_m=\arccos\frac{1}{2}\left(1+x-\sqrt{1-y^2}\right)$$

$$0\le\beta\le\beta_m=\arccos\frac{1}{2}\left(1+w-\sqrt{1-s^2}\right)$$

最小化すべきは、$z=GN+NA+AP+PQ$ の値です.

コンピュータの予備粗計算によると、最小となる場合、$\alpha=\alpha_m$、$\beta=\beta_m$ が成り立っていました. したがって、$z=z(w,x,y)$ と考えれば良い.

ちなみに $s\to s_1+0$ のとき、$w\to+0$ となって、N が G に重なり、②に移ります.

この場合の計算結果は次の通り.

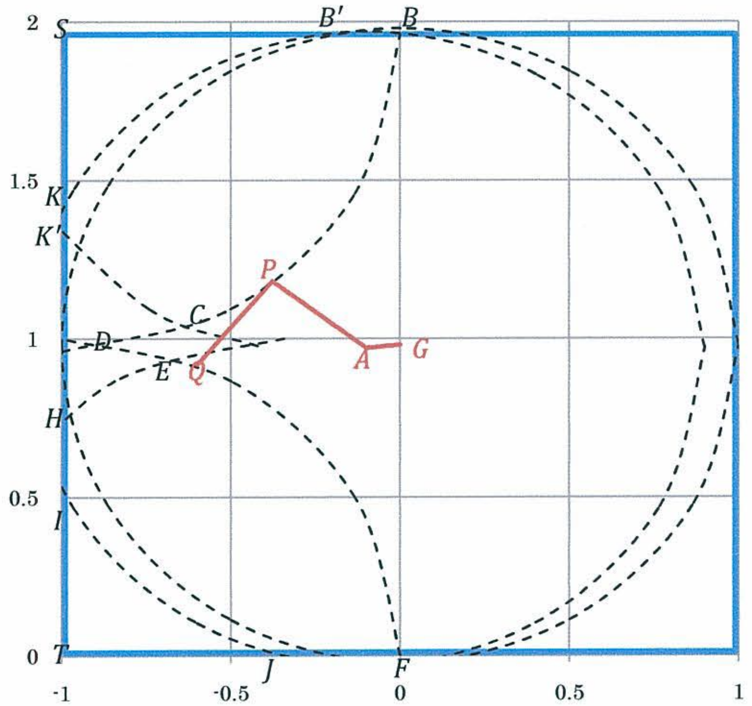
半横長	横長		最短距離
s	x	z	$2z$
1.0000	2.000	0.759942618877400	1.519885237754800
0.9995	1.999	0.758593846396449	1.517187692792898
0.9990	1.998	0.757330620608133	1.514661241216267
0.9985	1.997	0.756086190263969	1.512172380527939
0.9980	1.996	0.754853598114475	1.509707196228950
s_1	$2s_1$	0.753684315572326	1.507368631144652

A：９月号　問１

②　$G \to A \to P \to Q$ の場合

$s_2 = 0.9828 \cdots \leq s \leq s_1 = 0.9975 \cdots$ の範囲で適用できる.

正確には　$s_2 = 0.982898915985062 \cdots$



今までと同様に、次のように座標を定める.

$$G\begin{bmatrix}0\\s\end{bmatrix}、A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}、P\begin{bmatrix}-1+\cos\beta\\2s-\sin\beta\end{bmatrix}、Q\begin{bmatrix}-1+\cos\alpha\\\sin\alpha\end{bmatrix}$$

A の座標について $x \leq 0$ で考える. y については、s を超えることも、s 以下になることもある.

A：９月号　問１

B' の定義は、上辺上の点（ y 座標が $2s$ ）で、G または A からの距離が 1 となる x 座標が最小の点とした．B' の x 座標を B'_x と記述する．

すると、場合分けが必要となる．$x \le 0$ に注意！

$$x_G = -\sqrt{1-s^2}$$

$$x_A = x - \sqrt{1-(2s-y)^2} \qquad \text{ただし } 2s-y \le 1 \text{ のとき}$$

$y < 2s-1$ のとき、$B'_x = x_G = -\sqrt{1-s^2}$

$y \ge 2s-1$ のとき、$B'_x = min\left\{x - \sqrt{1-(2s-y)^2},\ -\sqrt{1-s^2}\right\}$

$CB' = CS = 1$ より、$C_x = \frac{1}{2}(-1 + B'_x)$ となり、P は C の右側にあるので

$$\cos\beta \ge C_x + 1 = \frac{1}{2}(1 + B'_x)$$

上の等式の場合を満たす β を β_m とすると、β の変域は次のようになる．

$$0 \le \beta \le \beta_m$$

J の定義は、下辺上の点（ y 座標が 0 ）で、G または A からの距離が 1 となる x 座標が最小の点とした．J の x 座標を J_x と記述する．

すると、この場合も、場合分けが必要となる．$x < 0$ に注意！

$$x_G = -\sqrt{1-s^2}$$

$$x_A = x - \sqrt{1-y^2} \qquad \text{ただし } y \le 1 \text{ のとき}$$

$y > 1$ のとき　$J_x = x_G = -\sqrt{1-s^2}$

$y \le 1$ のとき　$J_x = min\left\{x - \sqrt{1-y^2},\ -\sqrt{1-s^2}\right\}$

$ET = EJ = 1$ より $E_x = \frac{1}{2}(-1 + J_x)$ となり、Q は E の右側にあるので

$$\cos\alpha \ge E_x + 1 = \frac{1}{2}(1 + J_x)$$

A：９月号　問１

上の等式の場合を満たす α を α_m とすると、α の変域は次のようになる.

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_m$$

そして、$z = GA + AP + PQ$ であり、この z を最小にする、x, y, α, β に対して、粗計算によると、$\alpha = \alpha_m$ が成り立っていた. α_m, β_m について

$0.9965 < s$ のとき、

$$\alpha_m = arccos\frac{1}{2}\left(1 + x - \sqrt{1 - y^2}\right),\ \beta_m = arccos\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - s^2}\right)$$

$s_2 = 0.9828 \cdots < s \leq 0.9965$ のとき

$$\alpha_m = arccos\frac{1}{2}\left(1 + x - \sqrt{1 - y^2}\right)、\beta_m = arccos\frac{1}{2}\left(1 + x - \sqrt{1 - (2s - y)^2}\right)$$

この場合の計算結果は次の通り.

半横長	横長		最短距離
s	x	z	$2z$
s_1	$2s_1$	0.753684315572326	1.507368631144652
0.997	1.994	0.752417682796883	1.504835365593766
0.996	1.992	0.750006278649752	1.500012557299504
0.994	1.988	0.745236631518960	1.490473263037919
0.992	1.984	0.740540658793242	1.481081317586484
0.990	1.980	0.735922431573383	1.471844863146766
0.988	1.976	0.731387146888729	1.462774293777457
0.986	1.972	0.726941634304414	1.453883268608829
0.984	1.968	0.722595152594540	1.445190305189079
0.983	1.966	0.720462896000376	1.440925792000752

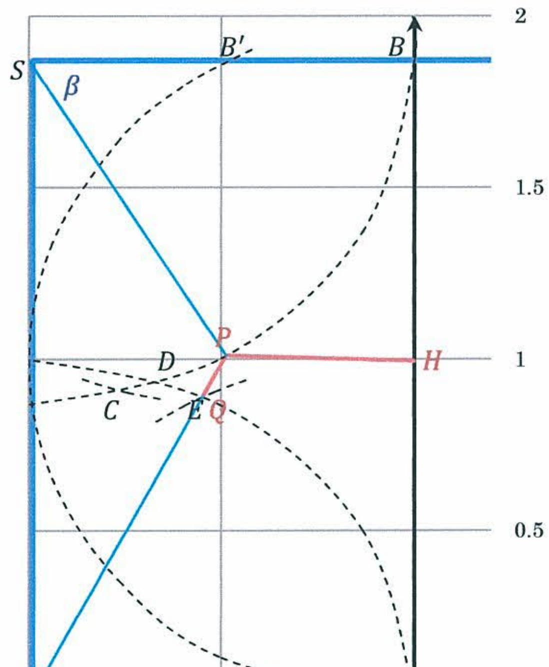
A：９月号　問１

③　$H \to P \to Q$ の場合

$s_3 = 0.9273\cdots \leq s \leq s_2 = 0.9828\cdots$ の範囲で適用できる．

正確には　$s_3 = 0.927318839859230709807282916780972733380 0\cdots$

ここで考慮する図は①や②とは異なっています．



今までと一部異なり、点 G の代わりに 点 H を導入しています．

$$H\begin{bmatrix}0\\w\end{bmatrix}、P\begin{bmatrix}-1+\cos\beta\\2s-\sin\beta\end{bmatrix}、Q\begin{bmatrix}-1+\cos\alpha\\\sin\alpha\end{bmatrix}\qquad 2s-1 \leq w \leq 1$$

今までは、明記されていない右半分の経路は、点 G に対して点対称になってい

A：９月号　問１

ましたが、ここでは、直線 BF に対して線対称となっていることも異なっている部分です.

w の変域を、$2s-1 \leq w \leq 1$ としたのは、$HB \leq 1$、$HF \leq 1$ を満たすため.

B' の x 座標 B'_x は

$$B'_x = -\sqrt{1-(2s-w)^2}$$

$CB' = CS = 1$ より、$C_x = \frac{1}{2}(-1+B'_x)$ となり、P は C の右側にあるので

$$\cos\beta \geq C_x + 1 = \frac{1}{2}(1+B'_x) = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-(2s-w)^2}\right)$$

J の x 座標 J_x は

$$J_x = -\sqrt{1-w^2}$$

$ET = EJ = 1$ より $E_x = \frac{1}{2}(-1+J_x)$ となり、Q は E の右側にあるので

$$\cos\alpha \geq E_x + 1 = \frac{1}{2}(1+J_x) = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-w^2}\right)$$

さらに、弧BC と弧EF の交点 D が、α, β の最大値を縛る可能性もある. それを考慮すると、D の y 座標は s なので

$$\sin\beta \leq 2s - s = s$$

$$\sin\alpha \leq s$$

このことをまとめると、α, β の最大値 α_m, β_m は次のようになる.

$$\alpha_m = \min\left\{\arccos\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-w^2}\right),\ \ \arcsin s\right\}$$

$$\beta_m = \min\left\{\arccos\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-(2s-w)^2}\right),\ \ \arcsin s\right\}$$

A：９月号　問１

先の図では、α の最大は点 E が定め、β の最大は点 D が定めていると分かる.
そして、$z = HP + PQ$ であり、これを最小化する場合を調べると、この s の範囲をコンピュータで粗計算すると、常に $\alpha = \alpha_m$ と分かる.

この場合の計算結果は次の通り.

半横長	横長		最短距離
s	x	z	$2z$
0.980	1.96	0.7137146856168309	1.4274293712336619
0.975	1.95	0.7026085377540009	1.4052170755080017
0.970	1.94	0.6917129702586674	1.3834259405173348
0.965	1.93	0.6810308820576349	1.3620617641152698
0.960	1.92	0.6705646908519354	1.3411293817038709
0.955	1.91	0.6603162802509890	1.3206325605019781
0.950	1.90	0.6502869524553324	1.3005739049106648
0.945	1.89	0.6404773887319181	1.2809547774638361
0.940	1.88	0.6308876198147842	1.2617752396295683
0.935	1.87	0.6215170080704813	1.2430340161409627
0.930	1.86	0.6123642427929838	1.2247284855859675

前の図は、$s = 0.935$ での最小移動を示していて、$E = Q$ が成り立っています.
図では分かりにくいですが、直線 PT の下側に E、Q が存在しています.

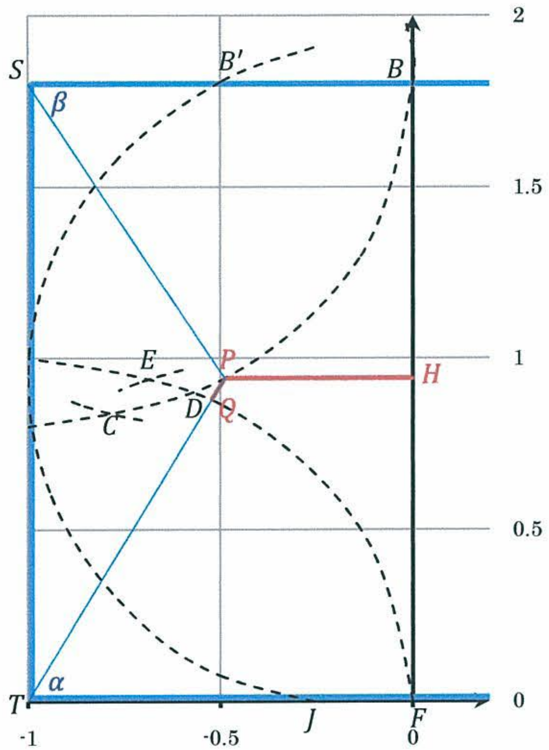
A：９月号　問１

④　$H \to P \to Q$ の場合

$s_3 = 0.8660\cdots \le s \le s_3 = 0.9273\cdots$ の範囲で適用できる.

正確には　$s_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.8660254037844386467637231707529361834715$

ここで考慮する図は記号だけを考えるなら、③と同じですが、内容は異なっています. 具体的には、H と P の y 座標が等しくなっていることです.



点の座標は、まず、次のように定めます.

$$H\begin{bmatrix}0\\w\end{bmatrix}、P\begin{bmatrix}-1+\cos\beta\\2s-\sin\beta\end{bmatrix}、Q\begin{bmatrix}-1+\cos\alpha\\\sin\alpha\end{bmatrix} \qquad 2s-1 \le w \le 1$$

A：９月号　問１

当然 $w = 2s - sin\beta$ が成り立っています.

この s の範囲で、α, β の最大値 α_m, β_m の値は

$$\alpha_m = \beta_m = arcsin\, s$$

最小化する z は $z = HP + PQ$ です. なお z が最小となるとき、フェルマの原理より、PQT は一直線上にあります. したがって、ここでは、これを利用して、理論的に求めてみます.（１変数なので楽）

主変数を w とする. 点 P の上辺からの距離は $2s - w$. $SP = 1$ より

$$HP = 1 - \sqrt{1-(2s-w)^2}$$

また　$PT = \sqrt{1-(2s-w)^2+w^2}$ で、$PQ = PT - 1$ より

$$PQ = \sqrt{1-(2s-w)^2+w^2} - 1$$

したがって

$$\begin{aligned} z(w) &= HP + PQ \\ &= 1 - \sqrt{1-(2s-w)^2} + \sqrt{1-(2s-w)^2+w^2} - 1 \\ &= \sqrt{1-(2s-w)^2+w^2} - \sqrt{1-(2s-w)^2} \end{aligned}$$

よって、$z'(w) = 0$ より

$$w\{4sw^2 + (1-16s^2)w - 4s(1-4s^2)\} = 0$$

z の最小値を与える w は

$$w = \frac{1}{8s}\left(16s^2 - 1 - \sqrt{32s^2+1}\right)$$

このときの z を求めると

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{16s^2+2-2\sqrt{32s^2+1}} - \frac{1}{8s}\sqrt{32s^2-2-2\sqrt{32s^2+1}}$$

さすがに、この式では定量的感覚がつかめないので、表を作ると、次の通り.

A：９月号　問１

半横長	横長		最短距離
s	x	z	$2z$
0.925	1.85	0.6034236909108742	1.2068473818217485
0.920	1.84	0.5945636328673141	1.1891272657346282
0.915	1.83	0.5857193671110520	1.1714387342221041
0.910	1.82	0.5768912296261753	1.1537824592523505
0.905	1.81	0.5680795662091490	1.1361591324182980
0.900	1.80	0.5592847328397568	1.1185694656795135
0.895	1.79	0.5505070960695624	1.1010141921391248
0.890	1.78	0.5417470334289037	1.0834940668578073
0.885	1.77	0.5330049338534973	1.0660098677069946
0.880	1.76	0.5242811981318112	1.0485623962636224
0.875	1.75	0.5155762393744402	1.0311524787488804
0.870	1.74	0.5068904835068115	1.0137809670136229

なお、$s \to \frac{1}{2}\sqrt{3}+0$ に対して、$P \to D$、$Q \to D$ となり、次の⑤になります.

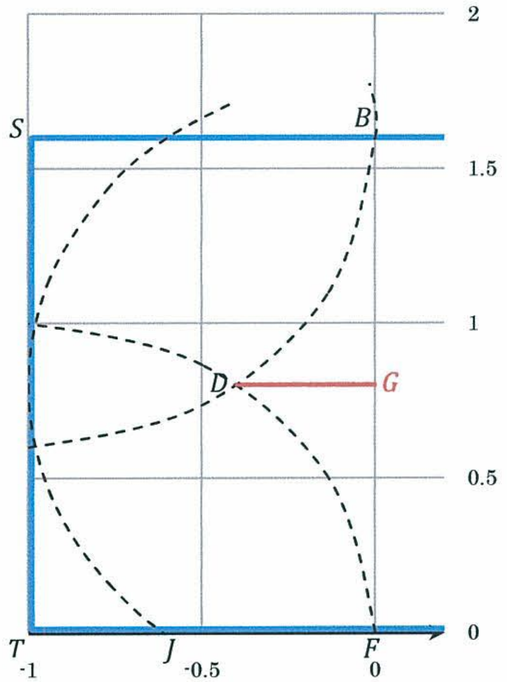
一応、横長を x として、最小移動距離 d は

$$d = 2z = \sqrt{4x^2+2-2\sqrt{8x^2+1}} - \frac{1}{2x}\sqrt{8x^2-2-2\sqrt{8x^2+1}}$$

A：９月号　問１

⑤　$G \to D$ の場合

$s \le s_3 = 0.8660\cdots\cdots$ の範囲で適用できる.



$$G\begin{bmatrix}0\\ s\end{bmatrix}、D\begin{bmatrix}\sqrt{1-s^2}\\ s\end{bmatrix}$$

これは、④において P, Q が、D に一致した場合です.

$$z = GD = 1 - \sqrt{1-s^2}$$

表は不要で、横長を x としたときの最小移動距離は

$$d = 2z = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2} = 2 - \sqrt{4 - x^2}$$

□

A：９月号　問１

■最終コメント

ようやく、完了しました.

横幅が２以下の場合、①→②‖③‖④→⑤ のような構造で、②と③、③と④の間には「不連続」（ $d = d(x)$ としたとき、d 自体は連続だが、微分係数は不連続）があります. こういうのは、物理的に言うと「相転移現象」であり、おおいに興味をそそられます.