

エレガントな解答

をもとむ

【出題】

出題

1

◎出題者

縫田光司

有限個の整数と四則演算(+, -, ×, ÷)と括弧を用いて別の整数を作る遊びについて考えます。例えば、4個の整数1, 2, 3, 7からの10の作り方の一つは(2-1)×3+7=10です。なお、例えば2と7を並べて書いて27÷3+1=10, のような操作はできないものとします。ここで、 $1 \leq k < n$ を満たす整数 n と k について、以下の性質 $P(n, k)$ を定義します：

$P(n, k)$: 1以上 $n-1$ 以下の異なる整数 k 個をどの

ように選んでも、それらから上記のような作り方で n を作れる。

(1) $P(n, 3)$ が成り立つ整数 $n \geq 4$ をすべて求めてください。

(2) $P(10, 4)$ が成り立つことを示してください。1から9までの整数4個の選び方は ${}_9C_4 = 126$ 通りなので、手作業でも一覧表を作れる分量ですが、もっと効率的な証明があるでしょうか？

(3) $P(n, k)$ が成り立つ n と k の組をたくさん(できれば無限個)見つけてください。その際、同じ n については k がなるべく小さい方が望ましいと考えます。

出題

2

◎出題者

上原隆平

(1) 細長い紙テープを用意しよう。そこに等間隔に交互に「山折り線(M)」と「谷折り線(V)」をつける。すべての折り線を折ると、いわゆる「ジャバラ折り」ができあがる。では今度は折り目をMMVVにしてみよう。この4つの折り目を長さ5の紙につけた場合、折りたたみ方は4通りある(図1)。つまりジャバラ折りは一意的に折りたためるが、一般の折り目の列に対しては、紙の折りたたみ方は複数ある。では、ジャバラ折り以外に折りたたみ方が一意的なものはあるだろうか。あるならば具体例を示し、ほかにないならばそれを証明せよ。

(2) 長さ $n+1$ の紙の上に等間隔に n 個の折り目をつけるものとする。このとき、折りたたみ方が指数関数的に増加する折り目の列を定義せよ。もちろん指

数関数的に増加することの証明が必要である。

(3) 長さ $n+1$ の紙の上に等間隔に n 個の折り目をつけるものとする。このとき、折り目の列をランダムに生成する。つまり各折り目は確率 $\frac{1}{2}$ でMかVが割り当てられるものとする。このとき、折りたたみ方の期待値を $f(n)$ として、関数 $f(n)$ のオーダーを評価せよ。具体的には、 $f(n)$ は n の多項式で抑えられるか、指数関数か、あるいはそれ以上だろうか。

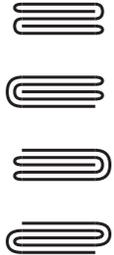
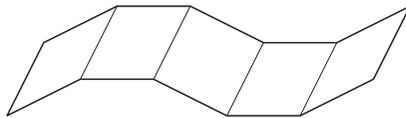


図1 折り線MMVVの4通りの折り方(右は紙を横から見たところ)。

●応募規定[解答2011年12月号]……B5判の用紙をご使用のうえ、解答用紙1枚ごとにA:問題の番号(例:8月12日出題問1)、B:住所、氏名(ふりがなも明記、誌上での仮名を希望される方は、こちらに明記)、年齢、職業を記入して下記宛先までお送りください。

宛先●〒170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4 日本評論社 数学セミナー〈エレガントな解答をもとむ〉係

締切●2011年9月20日(必着、締切日にご注意ください)

注……二問に応募される場合は、解答用紙を問題ごとにかえてください/年齢を忘れずにお書きください/解答用紙は評者の便宜を考慮して片面のみに記載してください/両面の使用を不可とします/ワープロ等の出力は可。